Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
ISSN 1982-4866
REVISTA DYNAMIS
FURB

A DINÂMICA DE MOVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO EM PERSPECTIVA NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA: O CASO HIPOTÉTICO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

THE DYNAMICS OF MOVEMENT OF MATHEMATICAL THINKING IN PERSPECTIVE IN THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS: THE HYPOTHETICAL CASE OF THE PYTHAGORAS THEOREM IN ELEMENTARY SCHOOL

Geraldo Aparecido Polegatti
Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Instituto Federal de Mato Grosso, IFMT
geappolegatti@gmail.com

Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Doutora em Matemática
Universidade Estadual de Londrina, UEL
angelamarta@uel.br

José Carlos Pinto Leivas
Doutor em Educação
Universidade Franciscana, UFN
leivasjc@ufn.edu.br

Resumo

Neste trabalho tem-se o objetivo de apresentar a dinâmica de movimento do pensamento matemático em perspectiva no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática de David Tall: o Mundo Corporificado, como o cenário dos sentidos e das percepções agindo em objetos matemáticos físicos ou mentais; o Mundo Simbólico, que promove as manipulações simbólicas e o desenvolvimento da linguagem matemática; e o Mundo Formal, que refina e descreve o pensamento matemático por meio de axiomas, teoremas e prova matemática. Considera-se o aprimoramento do conhecimento matemático por intermédio de três tipos de agir e por três modos de abstrair, matematicamente, no transcorrer da jornada cognitiva de cada participante (estudante e professor) em procedimentos educacionais da Matemática. Trata-se de uma pesquisa de cunho bibliográfico a partir de leituras de textos e reflexões teóricas. Propõe-se uma síntese do referido quadro teórico, que serve como guia para o planejamento, execução e análises posteriores de processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Como conclusão apresenta-se um exemplo hipotético sobre o Teorema de Pitágoras que pode ser utilizado no ensino desse conteúdo para estudantes do nono ano do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Matemático. Três Mundos da Matemática. Teorema de Pitágoras.

Abstract

This work aims to present the dynamics of movement of mathematical thinking in perspective in the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics by David Tall: the Embodied World, as the scenario of the senses and perceptions acting on physical or mental mathematical objects; the Symbolic World, which promotes symbolic manipulations and the development of mathematical language; and the Formal World, which refines and describes mathematical thinking through axioms, theorems and mathematical proof. The improvement of mathematical knowledge is considered through three types of action and through three ways of abstracting, mathematically, in the course of the cognitive journey of each participant (student and teacher) in educational procedures of Mathematics. This is a bibliographic research based on text readings and theoretical reflections. A synthesis of the referred theoretical framework is proposed, which serves as a guide for the planning, execution and further analysis of Mathematics teaching and learning processes. As a conclusion, we present a hypothetical example about the Pythagorean Theorem that can be used to teach this content to students in the ninth grade of elementary school.

Keywords: Mathematical Education. Mathematical Thinking. Three Worlds of Mathematics. Pythagorean theorem.

1 INTRODUÇÃO

O quadro teórico dos Três Mundos da Matemática é constituído tendo como base mais de cinquenta anos de pesquisas do autor David Olme Tall. Suas investigações abarcam teóricos da Psicologia da Educação e da Educação Matemática na busca por confluências das teorias estudadas, com destaque para aquelas que apontam formas como os indivíduos aprendem conteúdos da Matemática. Para Tall (2013), o conhecimento matemático constitui-se por um longo prazo, por meio de ações do homem em objetos matemáticos reais ou mentais. Em Os Três Mundos da Matemática, tais ações são comumente denominadas de Corporificado, Simbólico e Formal. “Fundamentalmente, a teoria dos Três Mundos da Matemática nos apresenta como um ser humano, em seu desenvolvimento, faz conexões matemáticas e como são desenvolvidas as estruturas de conhecimento que crescem ao longo do tempo em tamanho e sofisticação” (VISINTAINER, 2019, p. 31). Entre essas ações temos, por exemplo: observar, manusear, medir, contar, classificar, ordenar, inferir, modelar e demonstrar.

No âmbito do Mundo Corporificado, Tall (2013) aponta que a construção do conhecimento matemático emerge das percepções no mundo real captadas por nossos sentidos, com destaque para a visão. Essas percepções são direcionadas a objetos reais ou físicos com o intuito de serem explorados por ideias matemáticas. Por exemplo, os sólidos geométricos são objetos tridimensionais que servem como modelos para ações matemáticas e suas posteriores reflexões. De acordo com Lima (2007), as ações se concentram inicialmente em objetos físicos e depois são aprimoradas para objetos matemáticos que conduzem a experiências mentais, ou seja, “[...] o indivíduo manipula o objeto no seu pensamento, observando-o, descrevendo-o, agindo e refletindo sobre ele” (BUENO; VIALI, 2019, p. 44).

Tall (2013) ressalta que no campo da Geometria, por exemplo, o indivíduo aprende ideias geométricas iniciais ao manipular objetos reais, com vistas a fazer comparações entre os objetos serem grandes ou pequenos, redondos ou não redondos, entre outras propriedades. Essas ações de comparação podem conduzir o indivíduo a identificar semelhanças entre os objetos reais em estudo, com as quais ele tende a classificar e ordenar esses objetos em grupos ou conjuntos em função de suas semelhanças. O autor ressalta que as relações sociais com outros indivíduos possibilitam a troca de informações, conduzindo a reflexões nesses objetos, promovendo o aprimoramento das ações individuais e levando a constituição deles por meio de cones, cilindros, esferas, prismas, pirâmides, entre outros.

De acordo com Tall (2013), as ações intuitivas em objetos matemáticos precisam ser incentivadas com vistas a reflexões que adentram ao Mundo Simbólico. O compartilhamento dessas ações ocorre por meio da linguagem simbólica da Matemática atuando sobre eles, como por exemplo, expressões algébricas, equações, funções, entre outros. Para o autor, a manipulação simbólica aprimora as percepções advindas dos objetos iniciais e estimula o desenvolvimento de representações mentais dos objetos matemáticos em estudo.

Nessa perspectiva, compreende-se que os estímulos a outras reflexões e seus compartilhamentos promovem o aprimoramento da linguagem simbólica e o desenvolvimento de novas representações mentais para um determinado objeto matemático em estudo. Reflexões, a partir das ações em sólidos geométricos, podem conduzir a representações de objetos matemáticos (fórmulas matemáticas) para o cálculo de perímetros, áreas e volumes.

Com relação ao escopo do Mundo Formal, segundo Tall (2020), a intensificação da manipulação algébrica, aliada às relações dialógicas entre estudantes e professores, embasa o aprimoramento da linguagem simbólica. Tanto a descrição quanto a dedução dessa linguagem simbólica, seja no campo da Álgebra, seja nos estudos com a Aritmética ou da Geometria, podem levar ao desenvolvimento de teorias axiomáticas formais à prova matemática.

Este trabalho compõe um recorte teórico da tese defendida pelo primeiro autor, sob orientação do segundo autor e, com o terceiro autor compondo suas bancas de qualificação e de defesa. O processo de pandemia desencadeado pela COVID 19, a partir de março de 2019, possibilitou-se maior tempo de leituras e análises dos textos acerca dos Três Mundos da Matemática publicados em meio digital por Tall (2007; 2008; 2016; 2019; 2020)[1], para compor o escopo teórico da referida tese. Além disso, incrementa-se esta pesquisa de cunho bibliográfico, com leituras e análises de trabalhos de pesquisadores brasileiros, publicados digitalmente no Catálogo de Teses e Dissertações (CTD)[2] da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Com relação à pesquisa bibliográfica, de acordo com Severino (2007), o investigador que realiza pesquisa bibliográfica busca nos registros disponíveis (livros, artigos, dissertações, teses, entre outros) de pesquisas anteriores que trazem dados teóricos já trabalhados, conceituados ou caracterizados por outros pesquisadores e que fazem parte da literatura científica da área do conhecimento em estudo. A partir das análises e reflexões do material bibliográfico investigado, o pesquisador propõe novas discussões, teorizações, críticas e argumentações que buscam contribuir para o desenvolvimento do tema e da área em tela.

Assim, por meio da ferramenta de pesquisa do CTD da CAPES, buscou-se por teses que trazem o nome Tall, emergindo-se desta investigação inicial 89 (oitenta e nove) trabalhos. Destes em14 (quatorze) textos abordam-se como base teórica os Três Mundos da Matemática, dentre os quais, se destacam Lima (2007), Schastai (2017), Martelozo (2019), Visintainer (2019) e Polegatti (2020), oriundos de programas de pós-graduação brasileiros, das áreas de Educação Matemática ou Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Neste artigo, tem-se o objetivo de apresentar a dinâmica de movimento do pensamento matemático perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, o qual sintetiza o cenário de desenvolvimento do conhecimento matemático, que ocorre em longo prazo, por intermédio das ações de professores e estudantes no(s) objeto(s) matemático(s) em estudo. Nesse quadro teórico, cada processo de ensino e de aprendizagem da Matemática pode ser constituído articulando as formas matemáticas de agir nos objetos matemáticos (prática, teórica e formal) com os tipos de abstrações (estrutural, operacional e formal). Essas são passíveis de serem desenvolvidas no transcorrer de cada processo educacional planejado. A seguir, apresenta-se as ideias que permeiam e caracterizam cada um dos Três Mundos da Matemática para o desenvolvimento de seu quadro teórico.

2 OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

O quadro teórico dos Três Mundos da Matemática apresenta o conhecimento matemático se desenvolvendo em mundos distintos com características próprias, mas que estão conectados e atuam de forma dinâmica com vistas ao aprimoramento do pensamento matemático. De acordo com Tall (2008), o Mundo Conceitual-Corporificado é fundamentado na percepção e reflexão sobre as propriedades dos objetos reais (vistos, sentidos e manipulados tanto fisicamente quanto mentalmente) e em objetos matemáticos que emergem das ações nos objetos

[1] https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
[2] http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html

ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.28, N.1, 2022 – P. 03 - 23

reais. O Mundo Operacional-Simbólico se desenvolve por meio de ações em objetos matemáticos promovendo a manipulação simbólica, que se articula em operações matemáticas como conceitos pensáveis funcionando, tanto como processos para fazer, quanto como conceitos para pensar. O Mundo Axiomático-Formal desenvolve-se por meio de definições e provas formais, envolvendo definições de objetos matemáticos conhecidos e conceitos formais com base em definições e conjuntos teóricos.

Segundo Tall (2020), as denominações para cada um dos três mundos podem ser simplificadas para Mundo Corporificado, Mundo Simbólico e Mundo Formal. Contudo, é essencial estarmos cientes do significado particular da nomenclatura de cada mundo matemático. Tall (2013) destaca que corporificado é o mundo das percepções no qual o indivíduo age. Ele é o propulsor do conhecimento matemático. Em ações nos objetos reais, desenvolvem-se imagens mentais que, posteriormente, são transformadas em linguagem simbólica, aprimorando-se por meio da manipulação simbólica, rompendo a fronteira do Mundo Corporificado adentrando ao Mundo Simbólico ou ao Mundo Formal.

Tall (2013) realça que o Mundo Simbólico se constitui a partir de ações nos objetos reais ou físicos, oriundas das percepções vigentes no Mundo Corporificado. Essas ações têm em vista a verbalização das percepções em simbolismos matemáticos, com procedimentos flexíveis, que possibilitam a execução de operações e cálculos matemáticos. Para o autor, estimular as manipulações simbólicas, bem como a socialização dessas ações nos objetos matemáticos proporcionam o refinamento da linguagem simbólica e o aprimoramento do conhecimento matemático.

Compreende-se o Mundo Simbólico caracterizado pelo simbolismo operacional que se desenvolve em graus de aprimoramento até romper a fronteira do Mundo Simbólico e adentrar ao Mundo Formal. O processo de quadratura do círculo, por exemplo, consiste em calcular a área do círculo por meio de um retângulo de área equivalente, segundo Roque (2015). Ele foi desenvolvido inicialmente pelo método da Exaustão, tendo provocado manipulação geométrica (construções geométricas). Sua socialização possibilitou o aprimoramento da linguagem simbólica e, consequentemente, o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Com relação ao cenário do Mundo Formal, de acordo com Tall (2013, p. 17, tradução nossa[3]): “há o emprego do formalismo axiomático que constrói o conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificados pela definição de conjuntos teóricos, cujas propriedades são deduzidas por prova matemática”. Ainda no âmbito do Mundo Formal, Robim; Tortola e; Almeida (2014, p. 6), indicam: “em termos gerais, é nesse mundo que ganha espaço a definição de objetos já conhecidos, a construção de demonstrações matemáticas, a lógica e a coerência relacionada à linguagem”. Voltando ao método da Exaustão, as interações sociais prosseguiram ao longo do desenvolvimento do conhecimento matemático e científico provocando o aprimoramento da linguagem formal da Matemática e da Ciência, segundo Roque (2015). As reflexões conduziram, por exemplo, à construção das definições de infinitesimais e de limite no campo de estudo do conhecimento matemático.

De acordo com Roque (2015), a precisão das construções geométricas foi redefinida por Descartes que utilizou técnicas algébricas para a definição de curvas, entre elas a circunferência e as cônicas. Essas técnicas algébricas aprimoraram os trabalhos com as curvas na busca de tangentes e áreas que repercutiram no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Já as manipulações algébricas, em meio a isso tudo, incentivaram o desenvolvimento dos

[3] “Axiomatic formalism builds formal Knowledge in axiomatic systems specified by set-theoretic definition, whose properties are deduced by mathematical proof”.

infinitesimais que, posteriormente, conduziram a construção da definição de limite. Ou seja, pode-se perceber no cenário histórico da Matemática que a prática conduz à linguagem simbólica e a manipulação simbólica leva aos teoremas, axiomas e prova matemática.

Nesse contexto, Tall (2013) destaca que os Três Mundos da Matemática estão interligados dentro de um cenário amplo e complexo. Os Mundos Corporificado e Simbólico desenvolvem-se em conjunto, pois as ações no cotidiano são características do primeiro e dão origem às operações simbólicas presentes no segundo. Por sua vez, as manipulações matemáticas têm suas representações incorporadas nas ações dos indivíduos em seu cotidiano. Nas relações entre os Mundos Corporificado e Simbólico, Tall (2020) ressalta que o desenvolvimento do simbolismo é mais complexo do que o da corporificação, pois as ações desencadeadas no Mundo Corporificado são realizadas nos objetos em si, reais ou mentais, enquanto as manipulações simbólicas são iniciadas com o cálculo, envolvendo o conceito de números e, depois, passam por vários estágios individuais com outras formas de operar e manipular simbolicamente.

Para Polegatti (2020), o incentivo a novas ações nos objetos matemáticos aprimorados constitui outras reflexões que são socializadas e conduzem ao refinamento e ao rigor da linguagem simbólica em axiomas, teoremas e prova matemática (o indivíduo provido de novas informações reflete e transforma a realidade). Com relação ao desenvolvimento cognitivo no campo das abstrações matemáticas, Tall (2013, p. 17, tradução nossa[4]) ressalta que "[...] à medida que a abstração estrutural se desloca para a definição e a dedução, isso leva ao início do pensamento formal corporificado e ao pensamento formal simbólico, o que pode, mais tarde, traduzir-se em teorias conjuntas de formalismo axiomático". Então, pode-se ir do Mundo Corporificado ao Mundo Formal sem necessariamente transitar pelo Mundo Simbólico, assim como pode-se ir do Mundo Simbólico ao Mundo Formal sem adentrar necessariamente ao Mundo Corporificado.

Segundo Tall (2013), a prova matemática aponta o ápice de aprimoramento do pensamento matemático e de refinamento da linguagem matemática, mas ela não é o fim do percurso. Os teoremas formais repercutem em outras formas de corporificações e simbolismos, promovem a integração dos Três Mundos da Matemática e reforçam a necessidade de se ter um arcabouço teórico geral para o desenvolvimento do pensamento matemático que se articula e se aprimora nesses três mundos.

De acordo com Matelozo (2019, p. 54):

> Ao longo do tempo, à medida em que os seres humanos vivenciam situações variadas, com experiências em contextos diferentes, vão realizando suas jornadas com construções e reconstruções mentais de conceitos matemáticos por meio de interações entre os Três Mundos da Matemática. Logo, nesse quadro teórico, há uma relação mútua nessas formas distintas de lidar e desenvolver a Matemática.

Ainda segundo Martelozo (2019), cada sujeito tem sua forma de desenvolver a construção do conhecimento matemático a partir de sua vivência e experiências particulares, mesmo quando são promovidas atividades em grupo. Cada indivíduo tem sua jornada particular, mas dinâmica que o conduz a "retornar para ideias de mundos já transitados, uma vez que, ao longo da aprendizagem da Matemática, cada sujeito se depara com obstáculos diferentes" (p. 55).

Portanto, as jornadas pelos três mundos matemáticos não seguem um roteiro único, mas variados roteiros singulares (cada indivíduo tem o seu). São percursos construídos no cognitivo

[4] "As structural abstraction shifts to definition and deduction, this leads to the beginnings of embodied formal thinking and symbolic formal thinking, which may later translate into set-theoretic axiomatic formalism".

de cada viajante e sem demarcar um ponto de início, de meio e de fim obrigatórios. Ou seja, cada jornada pode ser traçada pelo sujeito a partir de qualquer um dos três mundos e eles estão conectados por meio de fronteiras tênues e zonas de transição entre si. Então, em acordo com Polegatti (2020), compreende-se que o ir e vir entre os mundos reflete a dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os três mundos, acontecendo no cognitivo de cada viajante, e que não há um mundo fixo para iniciar ou finalizar a jornada.

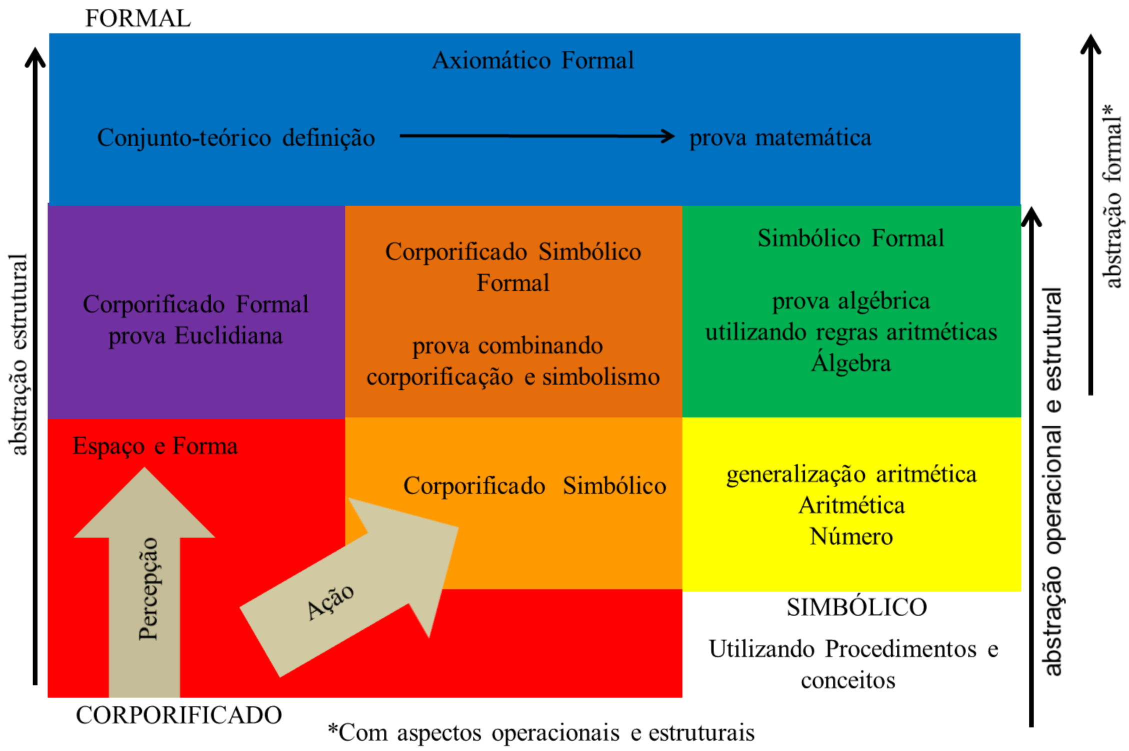
As ações nos objetos matemáticos oriundas de nossas percepções, características do Mundo Corporificado, sustentam o simbolismo matemático presente no Mundo Simbólico, segundo Tall (2020). Por sua vez, as ações de manipulações simbólicas são desenvolvidas no Mundo Simbólico e por meio delas ocorre o refinamento da linguagem matemática, perpassando por prova matemática e estruturando-se em definições baseadas em teoremas no interior do Mundo Formal.

Para Bueno e Viali (2019, p. 45), "é importante destacar que, apesar de apresentarem características individuais, podem existir intersecções entre os mundos, sendo que o estudante pode utilizar características de cada um deles no seu desenvolvimento cognitivo". De acordo com Visintainer (2019, p. 29), "para se desenvolver demonstrações no Mundo Formal, pode-se utilizar aspectos do Mundo Simbólico e do Mundo Corporificado, o que evidencia o inter-relacionamento dos Três Mundos da Matemática". Assim, compreende-se que as definições estruturadas por teoremas e prova matemática presentes no Mundo Formal, devolvem aos mundos Corporificado e Simbólico novas perspectivas de atuação e manipulação, respectivamente.

Esse retorno possibilita outros olhares para o cotidiano e suas corporificações, bem como suas construções e manipulações mentais no Mundo Corporificado e, consequentemente, gerando novas ideias e outros objetos matemáticos nos mundos Corporificado e/ou Simbólico. Essas ideias aprimoram-se novamente provocando o refinamento da linguagem simbólica e as reflexões do indivíduo podem conduzir a construção de novos objetos matemáticos que induzem a outras maneiras de prova matemática ainda mais eficazes em estruturas de axiomas e teoremas que as sustentam (Corporificado com Formal, Simbólico com Formal, Corporificado com Simbólico e com Formal e, Formal).

Na Figura 1, de acordo com Polegatti (2020), apresenta-se a interação entre os Três Mundos da Matemática, formando um todo incorporado, complexo e coerente. Para diferenciação e posterior confluências entre os mundos, escolhe-se as cores vermelha, amarela e azul para representar os Mundos Corporificado, Simbólico e Formal, respectivamente, por se tratarem de cores primárias.

Figura 1 – A conjunção inicial entre os Três Mundos da Matemática



Fonte: Polegatti (2020, p. 155) adaptado de (TALL, 2013, p. 17).

Conforme representado na Figura 1, de acordo com Polegatti (2020), as articulações entre os mundos promovem a fusão das três cores primárias em três cores secundárias e uma cor terciária. Como já foi destacado, as regiões que caracterizam ações em objetos matemáticos desenvolvidas estritamente nos mundos Corporificado, Simbólico e Formal possuem as cores primárias vermelha, amarela e azul, respectivamente. A região na cor laranja clara (amarela com vermelha) abrange ações conjuntas dos mundos Corporificado e Simbólico. A área na cor verde (amarela com azul) indica ações nos objetos matemáticos com características dos mundos Simbólico e Formal.

A região limitada pela cor roxa (vermelha com azul) representa que nela ocorrem ações com características simultâneas dos mundos Corporificado e Formal. Já a área central de cor laranja escura (amarela com vermelha e azul) incorpora o entrelaçamento dos Três Mundos da Matemática (prova formal combinando corporificação e simbolismo matemático). Com isso, destaca-se que a transição de um mundo para outro perpassa por regiões de intersecção denominadas por zonas de confluências entre os Três Mundos da Matemática (POLEGATTI, 2020).

Uma possível jornada pelos três mundos, no caso, rumo a uma abstração estrutural, parte do viajante em seu cotidiano com base em suas percepções e consequentes ações em seu meio. Por exemplo, utilizando procedimentos e conceitos (*proceitos*), ou seja, os símbolos matemáticos “podem ser vistos de maneira flexível tanto como o procedimento a ser efetuado, quanto como o resultado obtido a partir do desenvolvimento desse procedimento, que é o conceito” (LIMA, 2019, p. 8). Nessa perspectiva, as ações com manipulações simbólicas atuam sob essas percepções transformando-as em números, que por meio de normas ou regras presentes na Aritmética conduzem o viajante a duas modalidades de abstrações, denominadas por Tall (2013), de abstração estrutural e abstração operacional.

O desenvolvimento de abstração estrutural-operacional, por um lado, possibilita a transição do Mundo Corporificado (vermelho) ao espaço conjunto Corporificado Formal (roxo) instigando a compreensão da prova euclidiana. O desdobramento de abstração estrutural-operacional promove a transição do Mundo Simbólico (amarelo) à região delimitada pela intersecção entre os mundos Simbólico e Formal (verde) que aprimora a linguagem simbólica, mas que ainda utiliza regras aritméticas com vistas à prova algébrica. Em ambos, segundo Tall (2013), a transição para o Mundo Formal com a possibilidade de desenvolvimento de abstração formal se dá por intermédio dos estudos e reflexões, ainda com aspectos operacionais e estruturais. Já no âmbito do Mundo Formal (azul), há o aprimoramento da linguagem axiomática, que conduz a prova matemática e o desdobramento de abstração formal.

Concorda-se com Bisognin; Bisognin; Leivas, (2016), quando salientam que nem todos os estudantes ou professores de Matemática perpassam da mesma forma pelos Três Mundos da Matemática, pois cada indivíduo possui experiências diferentes, tanto aquelas desenvolvidas no seu cotidiano, quanto as do âmbito escolar. Os autores reforçam que o estudo desse quadro teórico é fundamental na formação inicial e continuada de professores de Matemática, pois “Essas oportunidades de ir e vir entre os Três Mundos da Matemática devem ser estimuladas pelos docentes formadores, em qualquer conteúdo trabalhado nas disciplinas” (p. 374).

De acordo com Polegatti (2020), cada indivíduo realiza a sua jornada e, no final do caminho, ao reiniciar outra jornada, o viajante já não é mais o mesmo, pois sua compreensão de cada Mundo da Matemática foi, provavelmente, ampliada. Durante uma jornada qualquer, o indivíduo vai construindo relações que o fazem reagir e após cada reação sua percepção de mundo matemático se amplia o que o conduz a perceber coisas (Mundo Corporificado) que ele não percebia antes. Essas novidades percebidas o levam a consequentes reações diferenciadas, abrindo outras possibilidades de manipulação matemática (Mundo Simbólico), que o conduzem por outros caminhos com graus de refinamento em linguagem matemática, que podem chegar a novas estruturas de teoremas e de prova matemática (Mundo Formal). Tais possibilidades podem, então, sustentar, internamente, o que foi sendo construído matematicamente ao longo dessa nova jornada.

Na próxima seção, apresenta-se a dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os mundos e suas zonas de confluências, articulada por movimentos de idas e vindas (deslocamentos horizontais frente ao quadro teórico) por meio de ações em objetos matemáticos. Essas ações são desencadeadas por atividades planejadas em processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, bem como pelos movimentos de subidas e descidas (deslocamentos verticais frente ao quadro teórico) provocados pelo provável desenvolvimento cognitivo dos estudantes ao longo das resoluções e discussões das atividades propostas em tais processos planejados pelo professor.

3 A DINÂMICA DE MOVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO ENTRE OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA: UMA DENTRE AS POSSÍVEIS INTERPRETAÇÕES

Neste trabalho, compreende-se que o conhecimento matemático se desenvolve cognitivamente na forma de pensamento matemático, sendo motivado por nossas ações nos objetos reais e em objetos matemáticos provenientes do mundo das ideias matemáticas. De acordo com Tall (2016), pode-se considerar que a dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática é caracterizada por três modos distintos, mas

ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.28, N.1, 2022 – P. 03 - 23

interligados ao se pensar matematicamente na tríade: matemática prática, matemática teórica e matemática formal. Também ocorre por três estágios de desenvolvimento cognitivo: abstração estrutural, abstração operacional, com confluências entre as duas (estrutural-operacional), e a abstração formal.

Segundo Tall (2013), a matemática prática constitui-se pelas ações de reconhecer e descrever características matemáticas em objetos físicos e mentais com aportes da Geometria. Isso ocorre ao realizar manipulações simbólicas e fazer cálculos por meio da Álgebra e da Aritmética, sem envolver conceitos presentes no Mundo Formal. Para o autor, a matemática teórica trabalha os níveis mais aprimorados das manipulações simbólicas intensificando a utilização da linguagem algébrica e de prova euclidiana no campo da Geometria, porém mantendo indícios de cálculos numéricos envolvendo a Aritmética. Já a matemática formal envolve o desenvolvimento da linguagem axiomática com base nas definições da teoria dos conjuntos, demonstrações de teoremas e prova matemática.

De acordo com Tall (2013), a abstração estrutural aprimora-se por meio de ações do homem sobre os objetos reais para, inicialmente, identificar suas propriedades matemáticas. Então, pode-se descrevê-las em outras ações para reconstruir os objetos matemáticos envolvidos ou, ainda, elaborar outros objetos, inclusive suas representações mentais. A abstração operacional é promovida por intermédio de nossas ações com operações em objetos matemáticos, cuja intensificação de manipulação aritmética (abstração estrutural-operacional) se desdobra com vistas à manipulação algébrica (abstração operacional). A abstração formal se desenvolve por meio das operações em definições formais para dedução, tanto de outras definições formais já existentes, consolidando-as, quanto para a construção de novas propriedades formais.

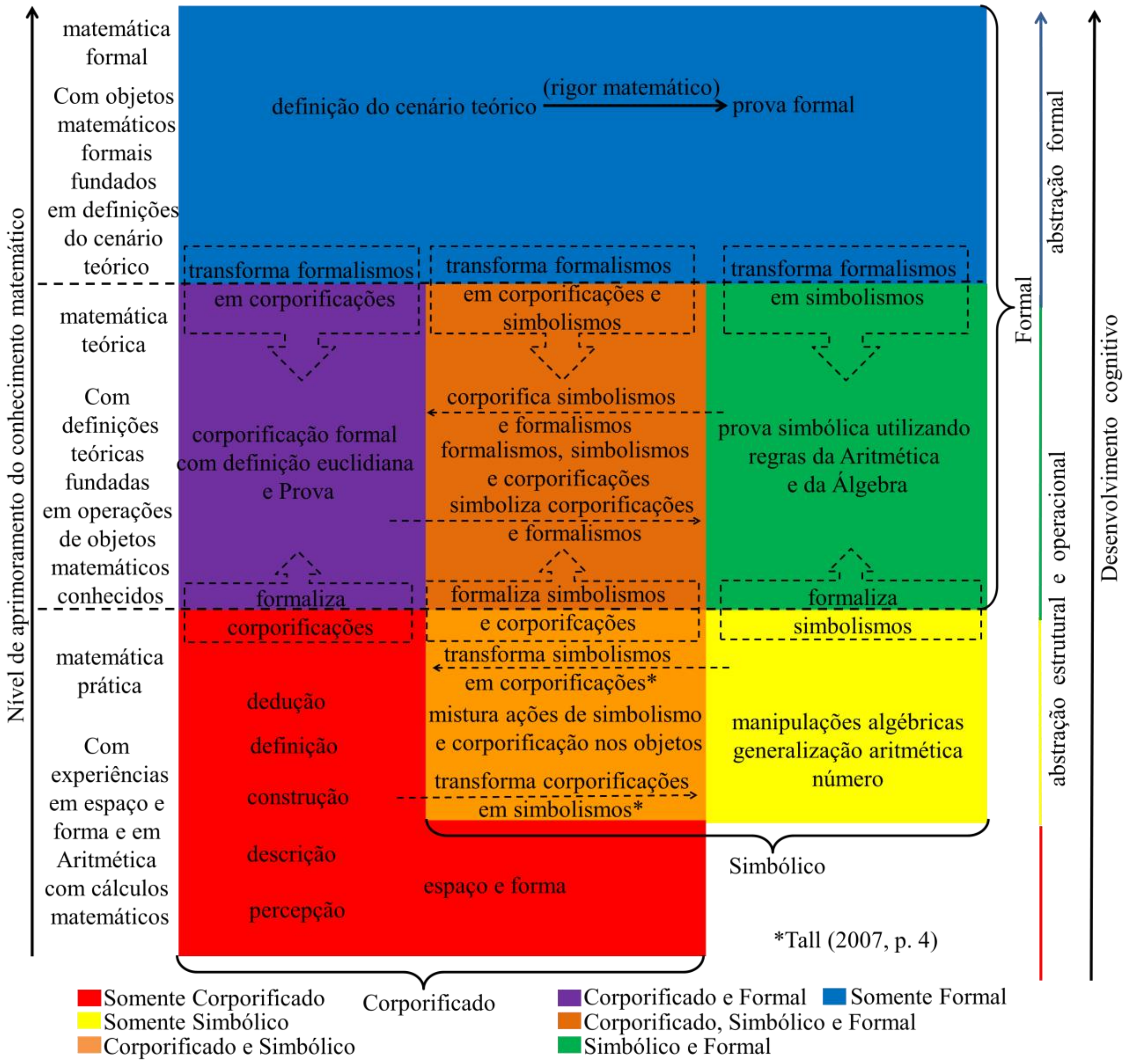
Corroborando com o diálogo, Schastai (2017, p. 55) indica:

> A abstração formal envolve uma mudança significativa na forma de pensamento, uma vez que a abstração estrutural e a abstração operacional a partir de percepção e ação tornam-se evidenciadas como conceitos matemáticos, a abstração formal é construída essencialmente por definições formuladas linguisticamente. Inconscientemente, pode continuar a ter ligações com percepção e ação, mas formalmente, oferece uma nova abordagem, universal para a matemática em que os teoremas provados dependem somente de definição e de demonstração.

Assim, compreende-se que a jornada cognitiva pelos Três Mundos da Matemática se desenvolve nos três processos de abstração com aprimoramento do pensamento matemático direcionado às definições formais, evidenciadas posteriormente pelos processos de percepção e ação nos objetos matemáticos. Tall (2019) destaca que a abstração formal desencadeada pelo estudo da matemática formal corresponde ao auge do pensamento matemático, ela conduz o conhecimento matemático à universalidade. A prova matemática é construída com uma linguagem própria por meio de teoremas e demonstrações, libertando o pensamento matemático da necessidade de perceber ou agir em seus objetos para descrever suas definições. Tall (2020) salienta que a abstração formal é o ápice, mas não é o fim, ela repercute no desenvolvimento do pensamento matemático embasando tanto a abstração estrutural quanto a abstração operacional.

Para Martelozo e Savioli (2019, p. 59), "os Três Mundos da Matemática não são hierárquicos, misturam-se e complementam-se no processo de aprendizagem da Matemática, sendo essas experiências, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático". Nesse contexto, construiu-se a imagem da Figura 2 para sintetizar o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Ressalta-se que a transição do pensamento matemático entre os mundos e suas zonas de confluência, geralmente, demanda um prazo longo de estudos por parte de cada viajante, principalmente, com relação à matemática formal e à abstração formal.

Figura 2: A dinâmica de movimento do pensamento matemático perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática



Fonte: Polegatti (2020, p. 179) adaptado de Tall (2007; 2013; 2016; 2019; 2020).

Antes de iniciar a descrição da interpretação própria dos autores sobre uma provável dinâmica de movimento do pensamento matemático, tendo como base de jornada o diagrama teórico da Figura 2, atenta-se ao que salienta Tall (2019, p. 14, tradução nossa[5])

> Esse diagrama será inevitavelmente interpretado por diferentes indivíduos de maneiras diferentes. Uma imagem bidimensional não pode representar toda a teoria. Não apenas omite o papel do aspecto afetivo do pensamento matemático, mas também depende de como cada indivíduo interpreta o diagrama em termos de suas próprias maneiras pessoais de pensar.

[5] “This diagram will inevitably be interpreted by different individuals in different ways. A two dimensional picture cannot represent the whole theory. Not only does it omit the role of the affective aspect of mathematical thinking, it depends on how each individual interprets the diagram in terms of their own personal ways of thinking.

Ao analisar a síntese do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática presente na Figura 2, com base em Polegatti (2020), entende-se que a matemática prática se constitui com as ações dos indivíduos em objetos matemáticos visando articular, em processos de ensino e de aprendizagem de algum conteúdo, os procedimentos matemáticos envolvidos por meio de suas percepções. As ações de matemática prática possibilitam a dinâmica de movimento do pensamento matemático no interior do Mundo Corporificado (região vermelha) com a predominância de desenvolvimento da abstração estrutural, via Geometria, e, com ou sem possíveis indícios da abstração operacional por meio de manipulações geométricas como, por exemplo, as construções envolvendo as técnicas de desenho geométrico.

Por outro lado, dependendo da atividade proposta, Polegatti (2020) nos informa que a matemática prática pode conduzir o viajante a organizar seu pensamento matemático utilizando elementos do Mundo Simbólico (região amarela), com a dinâmica de movimento do pensamento matemático limitada a esse mundo, visando o desenvolvimento da abstração operacional por meio de combinações entre a generalização aritmética e manipulações algébricas, com ou sem indícios de abstração estrutural. Ainda, pode apresentar suas resoluções com componentes desses dois mundos (região laranja clara = vermelha + amarela), o que se denomina de zona de confluência entre os mundos Corporificado e Simbólico e o possível entrelaçamento das abstrações estrutural e operacional.

Para Polegatti (2020), a zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico envolve tanto as percepções quanto as manipulações aritméticas, ou seja, o pensamento matemático transita entre os dois mundos. A matemática prática engloba as experiências em espaço e forma, que promovem ações nos objetos matemáticos com vistas ao desenvolvimento de abstração estrutural pelo indivíduo. Essas ações podem ser refinadas pelo pensamento matemático por meio das manipulações com números e generalização ou manipulação algébrica conduzindo, possivelmente, ao desenvolvimento de abstração operacional via Aritmética e/ou Álgebra. Nessa zona de confluência, o viajante, segundo Tall (2007), pode espontaneamente ou ser motivado a transformar corporificações em simbolismos, caso a atividade matemática a ser desenvolvida tenha se iniciado com alguma corporificação, ou simbolismos em corporificações, caso a atividade matemática tenha sido iniciada com algum simbolismo matemático.

Segundo Polegatti (2020), na mesma Figura 2, dependendo da atividade matemática proposta, o estudante pode, espontaneamente ou ser motivado, deslocar suas ações da matemática prática para a matemática teórica, promovendo o aprimoramento do seu pensamento matemático nessa ação. Isso a partir de formalizar corporificações ou corporificações e simbolismos ou, ainda, ao formalizar simbolismos. As ações de matemática teórica englobam as situações em que os indivíduos participantes do processo de ensino e aprendizagem da Matemática buscam articular procedimentos matemáticos presentes nas zonas de confluências entre dois ou três mundos. Ou seja, as ações de matemática teórica se difundem articulando características de dois ou três mundos, buscando o desenvolvimento predominante da abstração operacional com ou sem indícios de abstração estrutural (estrutural-operacional) e crescentes indícios de abstração formal. Esse processo é fundamental para o aprimoramento do pensamento matemático com vistas ao possível deslocamento para a matemática formal (POLEGATTI, 2020).

Assim, de acordo com Polegatti (2020), dependendo do grau de aprimoramento do pensamento matemático que a atividade proposta exija do indivíduo, sua resolução por intermédio das ações de matemática teórica, pode envolver, por exemplo, elementos dos Mundos Corporificado e Formal (região roxa = vermelha + azul). A dinâmica de movimento do pensamento matemático transita entre esses dois mundos por meio, segundo Tall (2016), de definições teóricas com base em prova geométrica, crescente formalização de corporificações, definições euclidianas e prova euclidiana. Portanto, dependendo da atividade proposta e do desenvolvimento cognitivo de cada estudante, ele pode espontaneamente ou ser motivado a transformar corporificações em formalismos. Se a atividade matemática envolver conceitos abstratos do pensamento matemático, por exemplo, o trabalho com a prova geométrica do Teorema de Pitágoras, possivelmente, provocará no estudante o desenvolvendo de abstração estrutural com indícios de abstração formal. Também, com ou sem indícios de abstração operacional preparar o terreno para a manipulação operacional da prova algébrica do referido teorema.

Para Polegatti (2020), as ações de matemática teórica nos objetos em estudo provocam predominância da abstração operacional sobre a abstração estrutural, ou seja, o estudante começa a se desvincular da abstração estrutural conforme seu pensamento matemático se desloca para a zona de confluência entre os mundos Simbólico e Formal (região verde = amarela + azul). Nela, a dinâmica de movimento do pensamento matemático transita entre esses dois mundos, utilizando relações matemáticas entre a Álgebra e a Aritmética em que, dependendo da atividade matemática proposta, o estudante utiliza definições teóricas com base em prova algébrica (TALL, 2016). Assim, dependendo da atividade proposta e do desenvolvimento cognitivo, cada estudante pode, espontaneamente, ou ser motivado a formalizar simbolismos. Sobretudo se essa atividade envolver conceitos abstratos do pensamento matemático, no âmbito da Álgebra, com vistas ao desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração formal, com ou sem indícios de abstração estrutural (POLEGATTI, 2020).

Ainda no campo de atuação da matemática teórica, com base em Polegatti (2020), há a zona de confluência entre os Três Mundos da Matemática, Corporificado, Simbólico e Formal (região laranja escura = vermelha + amarela + azul). Nela, a dinâmica de movimento do pensamento matemático envolvido no processo de ensino e de aprendizagem de um objeto matemático, transita entre os três mundos, utilizando relações matemáticas entre a Álgebra e a Geometria (Geometria Analítica), o que pode conduzir à prova matemática que articula componentes geométricas e algébricas, podendo, ainda, conter aportes da Aritmética. Em decorrência disso, dependendo da atividade proposta e do desenvolvimento cognitivo de cada estudante, ele pode, espontaneamente, ou ser motivado a formalizar corporificações e simbolismos. Principalmente se essa atividade envolve conceitos abstratos do pensamento matemático, no âmbito da Álgebra, Aritmética e Geometria conjuntamente, com vistas ao desenvolvimento das abstrações operacional e estrutural com indícios de abstração formal (POLEGATTI, 2020).

Ainda na análise da Figura 2, segundo Polegatti (2020), dependendo das atividades propostas, do estudo e da motivação do estudante, a transformação de matemática teórica em matemática formal se intensifica. Ou seja, o indivíduo pode ser motivado a trabalhar com a matemática teórica conduzindo ao seu aprimoramento com a manipulação simbólica, possibilitando haver cada vez mais indícios de abstração formal para, possivelmente, e com o tempo, promover o deslocamento da matemática teórica para a matemática formal. A matemática formal se desenvolve somente no Mundo Formal (região azul) relacionando, segundo Tall (2016), definições oriundas do cenário teórico com a prova matemática a partir de axiomas e teoremas. Nesse sentido, a dinâmica de movimento do pensamento matemático propiciado pela matemática formal intensifica a manipulação de estruturas formais com vistas ao desenvolvimento de abstração formal que transita somente no âmbito do Mundo Formal.

A matemática formal utiliza objetos formais (axiomas, postulados e teoremas) com base nas definições do cenário teórico. Salienta-se, não quer dizer que isso desenvolvido por ela não

ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.28, N.1, 2022 – P. 03 - 23

provoque reflexões nos outros mundos. De fato, com o desenvolvimento da matemática formal e, consequentemente, da abstração formal, o viajante, dependendo da atividade matemática proposta, pode, após compreender o desenvolvimento da prova formal, articular ações de: corporificar formalismos, ou simbolizar formalismos, ou ainda corporificar e simbolizar formalismos. Ou seja, o que é aprimorado e desenvolvido no Mundo Formal repercute nos outros dois mundos (POLEGATTI, 2020).

A seguir apresenta-se um caso hipotético envolvendo o estudo do Teorema de Pitágoras em análise diante do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática da Figura 2. Este quadro teórico, de certa forma, mapeia o processo de construção do conhecimento matemático de um ou mais conteúdos em estudo. Ele possibilita que o professor, já no processo de planejamento de uma atividade matemática qualquer, possa mapear as articulações entre as etapas de aprimoramento do pensamento matemático ao longo da jornada pelos mundos. A partir das ações de percepções e manipulações geométricas envolvidas, perpassa por manipulações aritméticas e/ou algébricas. Destaca as generalizações geométrica, aritmética e algébrica, bem como suas confluências. A partir disso, com vistas ao estudo e à manipulação com objetos matemáticos formais (axiomas, teoremas, entre outros), verificar que conduzem à prova matemática, no caso, a do Teorema de Pitágoras.

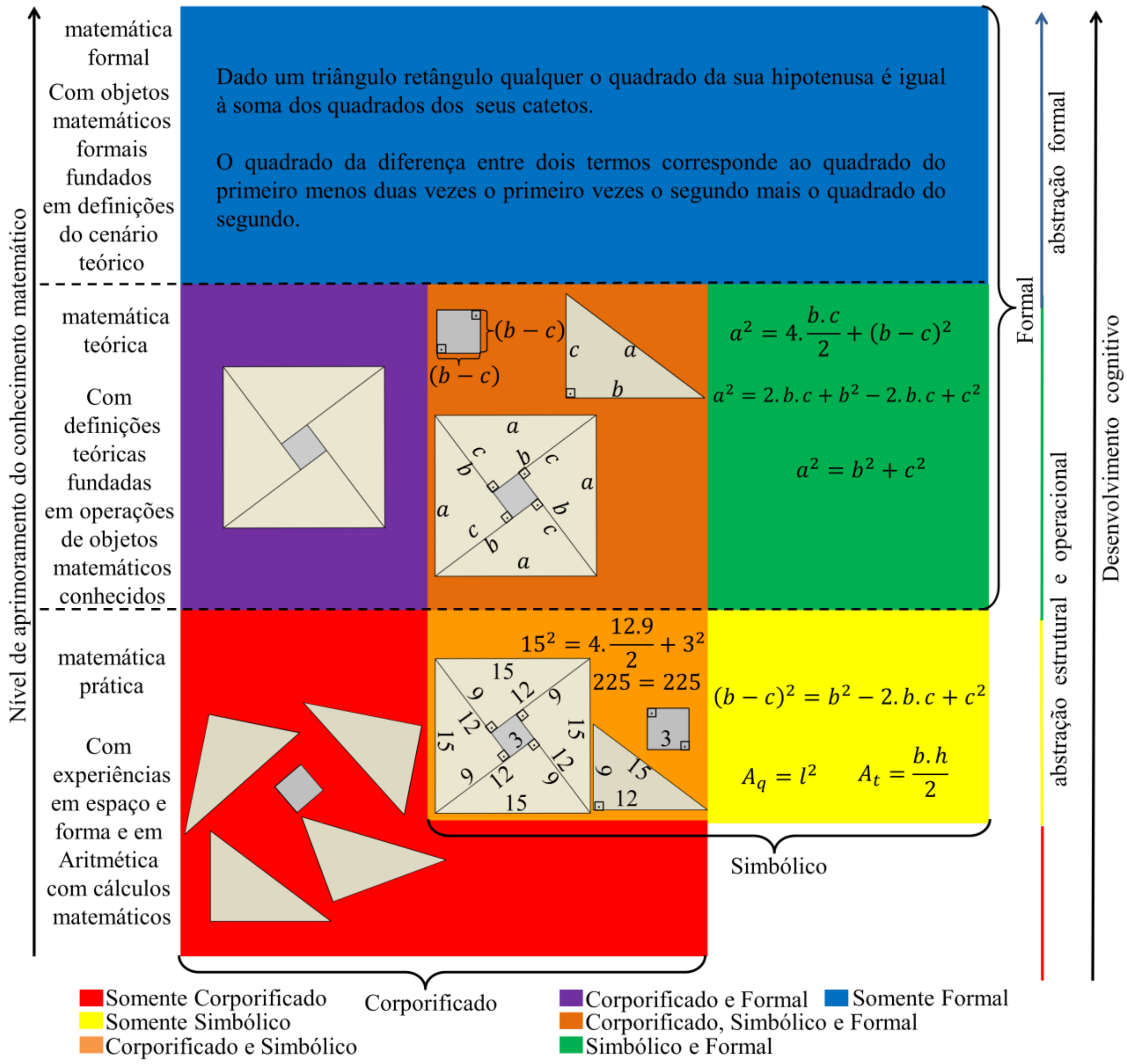
4 O CASO HIPOTÉTICO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras tem papel primordial no desenvolvimento do pensamento matemático. Ele é utilizado, inicialmente, para o cálculo da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer no âmbito da geometria euclidiana. Seu conceito é base, por exemplo, para a composição da relação fundamental na Trigonometria ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) e para o cálculo da distância d entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ no plano cartesiano, a partir de suas coordenadas, no campo da Geometria Analítica, ou seja, $\left(d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\right)$. Seu estudo faz parte do currículo de Matemática do nono ano do Ensino Fundamental, portanto a situação hipotética aqui desenvolvida, e apresentada perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, pode ser utilizada como base para a análise de desenvolvimento do pensamento matemático em estudantes a partir desse nível escolar.

No âmbito do Ensino Fundamental é possível desenvolver atividades matemáticas que trabalham ações de matemática formal com vistas a desenvolver ao menos indícios de abstração formal? Concorda-se com Lima (2019) ao salientar que não se aplica conceitos axiomáticos presentes no âmbito do Mundo Formal ao se trabalhar com estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Entretanto, segundo a autora “em qualquer atividade matemática encontram-se características do mundo formal, pois um aluno não constrói conceitos matemáticos sem compreender as características formais dele” (p. 8). Em concordância com Flores; Lima e; Müller, (2020, p. 1343) de que “não existe hierarquia ou roteiro definido previamente, ou seja, ocorre a estruturação de um trajeto próprio, com dificuldades e possibilidades únicas inerentes ao indivíduo que o percorre” reforça-se a importância disso no planejamento dos professores.

Apresenta-se e dialoga-se com os estudantes sobre as figuras geométricas do triângulo retângulo e do quadrado. No desenvolvimento da atividade, assim como salienta Tall (2013), é fundamental que os estudantes, para além de observar ou visualizar essas figuras, possam manuseá-las. Nesse sentido, sugere-se a utilização de papelão ou outro material resistente para a confecção das mesmas. Na imagem da Figura 3 traz-se a situação escolhida para a discussão do Teorema de Pitágoras por meio de quadrados e triângulos retângulos.

Figura 3 – O Teorema de Pitágoras na dinâmica de movimento do pensamento matemático nos Três Mundos da Matemática



Fonte: Os autores com base em Polegatti (2020)

A dinâmica de movimento do pensamento matemático ocorre em suas idas e vindas pelo Mundo Corporificado (região vermelha), por meio da matemática prática nas ações de obsevação ou visualização e manuseio dos quadrados e triângulos retângulos com vistas a identificá-los e classificá-los provocando o provável desenvolvimento de abstração estutural. Ao longo dessas ações, com a intensificação de matemática prática, os estudantes participantes devem ser instigados a manipularem essas figuras de modo que formem um único quadrado, cujo lado corresponde ao tamanho da hipotenusa do triângulo retângulo. No transcorrer desse procedimento, há o possível desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional nos participantes.

Já na zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Formal (região roxa), a matemática prática se transforma em matemática teórica e suas ações nos triângulos retângulos e no quadrado conduzem os estudantes a refletirem, sobre o que representa o quadrado formado pela junção dos quatro triângulos retângulos e o quadrado menor, ao compararem a dimensão de seu lado com o tamanho da hipotenusa de cada triângulo retângulo. Nesse processo, há o provável desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração formal, que conduz cada estudante a concluir que a área da região limitada pelo quadrado formado é composta pela adição das áreas das regiões limitadas pelos quatro triângulos retângulos com a área da região limitada pelo quadrado menor e, que a dimensão de seu lado corresponde à dimensão da hipotenusa de cada um dos quatro triângulos retângulos. Mas, qual é o valor numérico das áreas desses polígonos?

Assim, ao realizarem as medidas dos lados e dos ângulos das referidas figuras, por intermédio de ações da matemática prática e com o apoio de réguas e transferidores fornecidos pelo professor, a dinâmica de movimento do pensamento matemático conduz os estudantes a adentrarem na zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico (região laranja clara). No deslocamento, provavelmente, ocorre o desenvolvimento de abstração estrutural. Nesse contexto, as ações de matemática prática levam os participantes a realizarem manipulações aritméticas (envolvendo essencialmente números).

Essas ações com os números obtidos nas aferições das dimensões das figuras envolvidas se intensificam e conduzem os participantes a, possivelmente, desenvolverem abstração estrutural com indícios de abstração operacional, ao concluirem que o valor da área da região limitada pelo quadrado maior corresponde à soma dos valores das áreas dos polígonos que o compõe. Para tanto, a dinâmica de movimento do pensamento matemático adentra ao Mundo Simbólico (região amarela) por intermédio de ações de matemática prática com o cálculo das áreas das regiões limitadas pelos quadrados e triângulos retângulos por meio de suas respectivas fórmulas matemáticas.

Prosseguindo com a atividade, a dinâmica de movimento do pensamento matemático transita da zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico (região laranja clara) para a zona de confluenência entre os Três Mundos da Matemática (região laranja escura), transformando matemática prática em matemática teórica. Isso leva à generalização ao promover a substituição das medidas numéricas dos lados dos triângulos retângulos pelas letras a, b e c que passam a corresponder, respectivamente, às medidas quaisquer da hipotenusa e dos dois catetos dos referidos triângulos retângulos utilizados na atividade. Nesse procedimento, há o provável desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural.

Ainda na mesma zona de confluência entre os três mundos, as ações de matemática teórica são intensificadas, conduzindo os estudantes participantes a refletirem sobre a dimensão do quadrado menor $(b - c)$, originado na junção dos quatro triângulos retângulos e, cuja área, completa a área total da região limitada pelo quadrado maior. Para essa conclusão os participantes, provavelmente, desenvolvem abstração operacional com indícios de abstração formal. Mas então, qual a relação do cálculo da área da região limitada pelo quadrado maior com o que fundamenta o Teorema de Pitágoras?

Buscando responder a essa questão, a dinâmica de movimento do pensamento matemático no âmbito da zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal (região verde) e, por meio de ações envolvendo matemática teórica, os estudantes são motivados a realizarem manipulações algébricas. Devem partir da condição de que a área da região limitada pelo quadrado maior de lado medindo a corresponde à soma das áreas das regiões limitadas pelos quatro triângulos retângulos com a área da região limitada pelo quadrado menor. No transcorrer desse procedimento, os participantes precisam revisitar o Mundo Formal e o Mundo Simbólico para relembrar como se desenvolve o cálculo do quadrado da diferença entre dois termos quaisquer. Com a intensificação da manipulação algébrica há o provável desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural.

Ao concluirem a atividade, com o entendimento do que está definido no Teorema de Pitágoras, os estudantes provavelmente, desenvolvem abstração operacional com indícios de abstração formal. Ressalta-se que a dinâmica de movimento do pensamento matemático apresentada não é única, ela representa o olhar do pesquisador, ou seja, uma amostra do desenvolvimento cognitivo do conhecimento matemático. Portanto, muito menos ela é completa, estanque, linear. A intenção é conduzir a discussões e reflexões, além de apresentar uma parcela da possibilidade de abrangência do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, tanto nos momentos de planejamento de atividades, quanto nas análises e possíveis interpretações dessas atividades após suas aplicações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considera-se que por intermédio do estudo aprofundado dos Três Mundos da Matemática, por parte de professores que ensinam matemática, promove-se nesses profissionais uma visão holística dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Por meio do aprimoramento do seu quadro teórico (Figura 2), possibilita-se o planejamento de atividades educacionais que envolvem ações de matemática prática, que se entrelaçam com ações de matemática teórica e, dependendo do aprofundamento proporcionado, pode-se provocar ações de matemática formal. Ao mesmo tempo em que as ações didáticas do professor são dinamizadas com vistas a promover-se o compartilhamento do conteúdo matemático em estudo em suas formas (Corporificado, Simbólico e Formal) de desdobramento do conhecimento matemático. Nesse cenário educacional, em meio a sua jornada cognitiva pelos mundos matemáticos, cada estudante atua como protagonista da construção de conhecimento, em meio ao aprimoramento do pensamento matemático, alçando o desenvolvimento de abstração estrutural, operacional e formal.

Para o desenvolvimento da atividade proposta sugere-se a divisão dos participantes em grupos com três ou cinco componentes. Para diversificar os resultados das manipulações aritméticas com as medidas dos lados dos quatro triângulos retângulos e do quadrado, bem como as respectivas áreas das regiões limitadas por tais polígonos, é fundamental que cada grupo de estudantes receba do professor uma coleção dessas figuras com medidas diferentes, ou seja, o objetivo com essa diferenciação é que cada grupo chegue a um resultado diferente para o cálculo numérico das áreas dessas figuras.

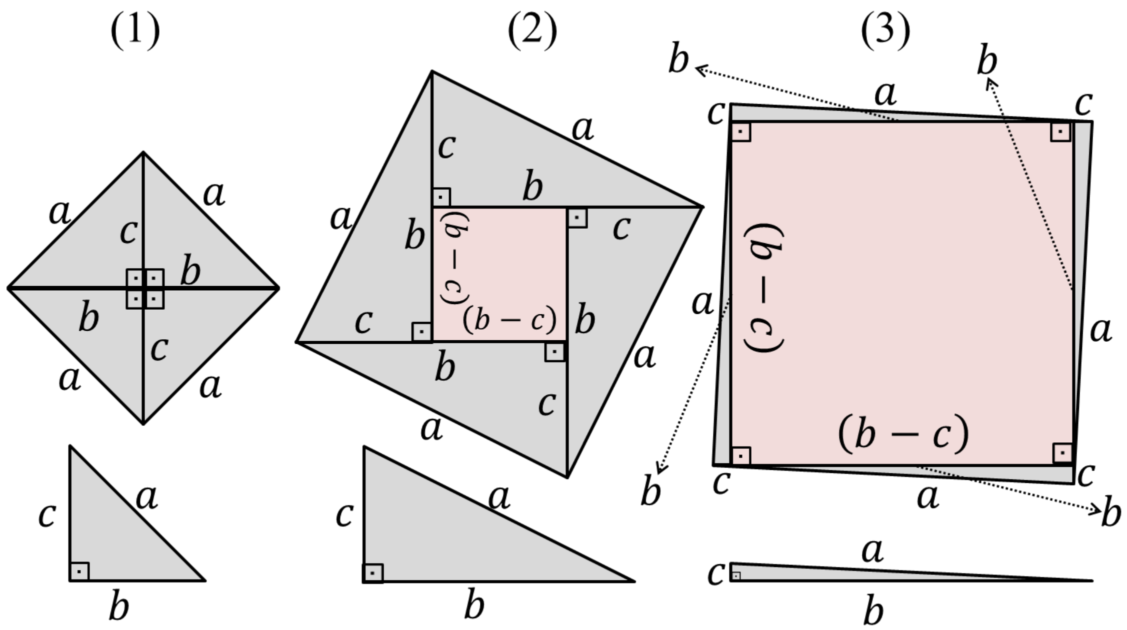
Ressalta-se que, no processo de manipulação aritmética com as medidas das dimensões dos triângulos retângulos, é fundamental que os participantes compreendam que a medida do lado do quadrado menor corresponde à diferença entre as medidas dos catetos dos triângulos retângulos envolvidos. Caso nenhum estudante destaque esse fato, cabe ao professor dialogar com os participantes conduzindo-os a refletirem de forma que algum ou mais deles aponte essa constatação. Logo após, é importante destacar no quadro que, apesar dos resultados obtidos pelos grupos serem diferentes para essa subtração, a dinâmica de movimento do pensamento matemático envolvida é a mesma (medida do cateto maior menos a medida do cateto menor é igual ao valor do lado do quadrado central).

Então, após esses cálculos com números (manipulação aritmética) o professor destaca para os participantes que, embora cada grupo possa obter resultados diferentes, o procedimento de cálculo das áreas dessas figuras é o mesmo. Isso é relevante para professores refletirem, novamente, que a dinâmica de movimento do pensamento matemático é a mesma. Logo a seguir, o professor instiga os estudantes a trabalharem com letras no lugar dos números, sugerindo as letras a, b e c para representarem, respectivamente, as medidas das hipotenusas e dos catetos dos triângulos retângulos.

Destaca-se que, no procedimento de substituição dos números pelas letras sugeridas algum participante pode questionar se cada grupo deveria utilizar letras diferentes, pois os números não são os mesmos para cada um. Entende-se ser esse um questionamento relevante e, no caso de não ser levantado por nenhum estudante, o professor deve provocar essa indagação. A resposta sugerida é que as letras a, b e c representam, nessa atividade, respectivamente, as dimensões da hipotenusa e dos dois catetos de quaisquer triângulos retângulos. Portanto, elas são *variáveis* e servem para todos os grupos. Com essas medidas pode-se generalizar os cálculos realizados com números em uma única expressão algébrica. Isso acontece, por exemplo, com as fórmulas matemáticas utilizadas para calcular as áreas das regiões limitadas por quaisquer triângulos e quadrados.

Assim como discutido em relação aos números, é fundamental o diálogo com os participantes com vistas a eles compreenderem que o lado l do quadrado menor (central) corresponde à diferença entre os catetos dos triângulos retângulos, ou seja, $l = b - c$. Ainda, com relação a essa diferença entre os catetos, é importante o professor fomentar o debate trazendo o caso em que os quatro triângulos retângulos utilizados apresentam seus dois catetos com a mesma dimensão e, outro em que a diferença entre eles possa ser grande, mas nunca maior que a dimensão do terceiro lado. Como pode ser isso? Na Figura 4 ilustram-se esses exemplos.

Figura 4 – A variação entre as medidas dos catetos



Fonte: Os autores.

Assim, conforme a representação (1) da Figura 4, quando os catetos dos quatro triângulos retângulos possuem dimensões iguais $(b = c)$ não há a formação do quadrado central como acontece nas imagens (2) e (3) da mesma figura, pois nesse caso ocorreria $b - c = 0$. Todavia, essa situação ainda é válida para apresentar o Teorema de Pitágoras por meio da igualdade entre a soma das áreas das regiões limitadas pelos quatro triângulos retângulos com a área da região limitada pelo quadrado de lado a (hipotenusa dos referidos triângulos) constituindo a seguinte manipulação algébrica:

$$a^2 = 4.\frac{b.c}{2}$$

$$a^2 = 2.b.c$$

Ao comparar essa resposta com o Teorema de Pitágoras, não parece haver a mesma construção quando os dois catetos possuem dimensões diferentes ($a^2 = b^2 + c^2$). Contudo, ao aplicar a condição de igualdade entre os dois catetos ($b = c$) e realizar algumas manipulações algébricas obtem-se dois resultados similares ao que é descrito no Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 2.b.b \qquad a^2 = 2.c.c$$

$$a^2 = 2.b^2 \qquad a^2 = 2.c^2$$

$$a^2 = b^2 + b^2 \qquad a^2 = c^2 + c^2$$

O professor pode dialogar com os estudantes sobre $b = c$. Portanto, elevando os dois membros da igualdade ao quadrado obtem-se $b^2 = c^2$ e daí é possível trocar, por exemplo, o segundo b^2 da equação $a^2 = b^2 + b^2$ por c^2 chegando-se ao resultado $a^2 = b^2 + c^2$. Pode-se concluir com os participantes que o valor mínimo para a diferença entre os dois catetos (cateto maior menos o cateto menor) é zero. Logo após essas conclusões, o professor foca a atenção dos estudantes na representação (3) da Figura 4, indagando qual seria o valor máximo para a diferença entre os dois catetos b e c?

Acontece que, com relação às dimensões dos três lados de um triângulo qualquer, o Teorema da Desigualdade Triangular assegura que "a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior que o comprimento do terceiro lado" (MOISE; DOWNS, 1971, p.185). Aplicando esse teorema pode-se escrever que $a + c > b$, ou seja, entende-se que, obrigatoriamente, $a > b - c$. Dessa maneira, pode-se concluir que a diferença entre os dois catetos b e c de um triângulo retângulo qualquer tende ao valor máximo (limite) que corresponde ao valor de sua hipotenusa a. Logo,

$$0 \leq b - c < a$$

Conclui-se ressaltando que o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática concentra em um diagrama geral, complexo e dinâmico, os três modos distintos, mas interligados de se pensar matematicamente (matemática prática, matemática teórica e matemática formal) no desenvolvimento de processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos da Matemática. Além disso, agrega, simultaneamente os três tipos de abstrações (estrutural, operacional e formal) que estão conectadas pela dinâmica de movimento do pensamento matemático no transcorrer das atividades propostas no processo educacional. Ao pesquisar e utilizar o referido quadro teórico no planejamento e execução do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o professor pode vislumbrar possibilidades de interação do(s) conteúdo(s), perpassando pelas três etapas de desenvolvimento coerente e complexo do conhecimento matemático, ou seja, desde a corporificação, até adentrar ao simbolismo e a formalização.

Agradece-se à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; LEIVAS, J. C. P. Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática. **Zetetiké.** Campinas-SP, UNICAMP, v. 24, n. 3, p.361-377, 2016.

BUENO, R. W. S.; VIALI, L. O Cálculo e os Três Mundos da Matemática: um estudo do conhecimento. **DYNAMIS.** Blumenau-SC, FURB, v. 25, n. 2, p. 39-55, 2019.

FLORES, J. B.; LIMA, V. M. R.; MÜLLER, T. J. Convergências e Complementariedades entre as teorias dos Três Mundos da Matemática e da Sociointeratividade. **Bolema.** Rio Claro-SP, UNESP, v. 34, n. 68, p. 1341-1358, 2020.

LIMA, R. N. **Equações Algébricas no Ensino Médio:** uma jornada por diferentes Mundos da Matemática. 357f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, R. N. Dispositivos móveis em sala de aula: uma jornada por Três Mundos da Matemática. **REVEMAT.** Florianópolis-SC, UESC, v. 14, n. 1, p. 1-21, 2019.

MARTELOZO, D. P. S. **Interações entre cognição e afetividade na aprendizagem da Matemática.** 137f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

MARTELOZO, D. P. S.; SAVIOLI, A. M. P. D. Já-encontrados na aprendizagem da Matemática: quais implicações. **VIDYA.** Santa Maria-RS, UFN, v. 39, n. 1, p. 55-71, 2019.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna.** São Paulo: Editora Edgard, 1971.

POLEGATTI, G. A. **Jornadas pelos Três Mundos da Matemática sob perspectiva do Programa Etnomatemática na Licenciatura Intercultural Indígena.** 360f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ROBIM, B. N. P. A. S.; TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. A linguagem em atividades de modelagem matemática: caracterizações nos Três Mundos da Matemática. **REnCiMa.** São Paulo-SP, Cruzeiro do Sul, v. 5, n. 1, p. 1-21, 2014.

ROQUE, T. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

SCHASTAI, M. B. **Tall e Educação Matemática Realística:** algumas aproximações. 179f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico.** São Paulo: Cortez, 2007.

TALL, D. O. Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education, Plenary at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education. **Procedings…**, San Diego, California, USA, p. 1-18, 2007. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall//pdfs/dot2007b-rume-keynote.pdf

TALL, D. O. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, p. 1-18, 2008. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2008e-merj-3worlds.pdf

TALL, D. O. **How Humans Learn to Think Mathematically:** Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. **Three worlds of mathematics and the brain and Three Worlds and the calculus that discuss current developments of the theoretical framework as yet unpublished.** p. 1-17, 2016. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2016-3-worlds-calculus.pdf

TALL, D. O. Complementing supportive and problematic aspects of mathematics to resolve transgressions. **In:** long-term sense making. Fourth Interdisciplinary Scientific Conference on Mathematical Transgressions, Krakow, Opening Plenary Presentation. p. 1-27, 2019. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2019a-transgressions-krakow.pdf

TALL, D. O. Making Sense of Mathematical Thinking over the Long Term: The Framework of Three Worlds of Mathematics and New Developments. Draft. To appear in Tall, D.; Witzke, I. (Eds.). **MINTUS:** Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung. Wiesbaden: Springer, p. 1-26, 2020. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2020a-3worlds-extension.pdf

VISINTAINER, M. **Significados de Cônicas à luz dos Três Mundos da Matemática**. 228f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.