Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

REVISTA DYNAMIS

A UNIDADE IMAGINÁRIA: A IMAGEM CONCEITUAL EVOCADA POR ALUNOS DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS

IMAGINARY UNIT: THE CONCEPT IMAGE EVOKED BY STUDENTS OF A BACHELOR'S DEGREE IN SCIENCE

Wagner Marcelo Pommer
Doutor em Educação
Universidade Federal de São Paulo- Depto de Ciências Exatas e da Terra.
wagner.pommer@unifesp.br.

Resumo

Os números complexos representam um assunto teórico e são usualmente apresentados em uma abordagem formal envolta em um quadro algébrico, o que acarreta dificuldade de compreensão pelos alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior. O objetivo deste artigo foi averiguar como a imagem conceitual dos números complexos é expressa pelos alunos de um curso de Licenciatura em Ciências com relação à unidade imaginária e verificar se e em que medida esta imagem conceitual pode ser incrementada por meio de uma intervenção didática. A unidade imaginária é um obstáculo para a aprendizagem dos números complexos, o que demanda uma investigação de como a imagem conceitual é evocada pelo aluno nas atividades relacionadas aos números complexos. Na parte metodológica foi elaborada e aplicada uma intervenção didática, adaptada a partir das três fases iniciais da Dialética Ferramenta-Objeto, descrita em Douady (1986), a alunos de uma universidade pública do estado de São Paulo. Os resultados revelaram certo incremento na imagem conceitual dos alunos, promovida pela mudança do quadro aritmético para o quadro geométrico advindo pela aplicação da intervenção didática.

Palavras-chave: Dialética Ferramenta-Objeto. Imagem Conceitual. números complexos. Unidade imaginária.

Abstract

Complex numbers represent a theoretical issue and are usually presented in a formal approach wrapped in an algebraic framework, which makes a difficulty understanding for high school and college students. The aim of this article was to find out how the conceptual image of complex numbers is expressed by students of a Bachelor's Degree in Science in relation to the imaginary unit and to see if and to what extent this conceptual image can be increased through a didactic intervention. The imaginary unity is an obstacle to complex numbers learning, which requires a survey of the evoked concept image by students in facing to activities involving complex numbers. In the methodological part, a didactic intervention was developed and applied, adapted from the three initial phases of the Dialectic Tool-Object, described in Douady (1986), to students of a public university at São Paulo state. The results revealed a little improvement in the students' conceptual image promoted by the possibility of changing from the arithmetic to the geometric frame arising from the didactic intervention application.

Keywords: Dialectic Tool-Object. Concept Image. Complex numbers. Imaginary unity.

1 INTRODUÇÃO

Para Machado (1995) a dialética inerente ao par concreto&abstrato é essencial ao ensino da Matemática. Para o autor, o ideal é que ocorra uma dinâmica onde possa se partir de uma situação concreta, apreendem-se os elementos, abstraem-se relações, propriedades e conceitos, de modo a se começar um novo ciclo, para a evolução de certo conhecimento.

Em particular, Nordlander e Nordlander (2012) e Ghedamsi (2017) destacam que os números complexos representam um assunto abstrato e de difícil compreensão conceitual tanto por alunos da escolaridade básica como no segmento do Ensino Superior. Desse modo, seria importante reestabelecer a dialética presente ao tema dos números complexos de modo a tornar os conceitos mentalmente acessíveis e assim favorecer a compreensão dos estudantes.

Autores como Carneiro (2004a;b), Fontes e Muniz (2013), Puhl e Lima (2014) e Ghedamsi (2017) ressaltam que apesar de constar do programa oficial do Ensino Médio, os números complexos são raramente abordados na sala de aula da escolaridade básica.

Carneiro (2004b) afirma que números complexos ocupam uma posição *sui generis*, pois no Ensino Médio são evitados e, em diversas licenciaturas de Matemática ou Ciências, não merecem atenção. Porém, os números complexos desempenham um papel importante nos diversos ramos da Matemática e em algumas aplicações em diversas áreas do conhecimento.

O objetivo deste artigo foi averiguar como a imagem conceitual dos números complexos é expressa pelos alunos de um curso de Licenciatura em Ciências com relação à unidade imaginária e verificar se e em que medida esta imagem conceitual pode ser incrementada por meio de uma intervenção didática.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Em alguns manuais didáticos do Ensino Médio a introdução aos números complexos é realizada pela via formal. Nesta opção, Carneiro (2004a;b) destaca que o estudo dos números complexos fica baseado na definição formal associada a escrita algébrica z= a+bi, com ‘a’ e ‘b’ números reais e ‘ $i = \sqrt{-1}$ ’ é postulado como a unidade imaginária.

Essa escolha corresponde a uma “[...] abordagem puramente algébrica, onde estão ausentes o significado e as aplicações destes números” (CARNEIRO, 2004a, p. 1). Isto implica em dificuldades de compreensão pelos alunos secundaristas e, posteriormente, para aqueles alunos que irão cursar as Licenciaturas em Matemática, Ciências e afins.

Considera-se assim que essa etapa de formalização do conhecimento matemático pode ser fator de problemas aos alunos. No ensino, é comum um conceito ser apresentado por:

> [...] um símbolo ou nome que permite ser comunicável e a sua manipulação mental. Porém, a estrutura cognitiva total que dá vida ao significado de um conceito é muito mais que a evocação de um mero símbolo. É muito mais que qualquer imagem mental,

> seja ela pictórica, simbólica ou de qualquer outra natureza[1] (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa).

A pesquisa de Rosa (1998) apontou que alguns livros didáticos de Matemática introduzem os números complexos no Ensino Médio por meio da resolução da equação do 2° grau com discriminante negativo. O autor destaca a equação $x^2 + 1 = 0$ como exemplo comum encontrado nesse tipo de material. A resolução da equação recai na raiz quadrada de um número negativo, que não existe no universo dos números reais. Em seguida ocorre menção a existência dos números complexos, onde o elemento $i = \sqrt{-1}$ é postulado como sendo a unidade imaginária.

Vale destacar que a opção de alguns manuais didáticos em abordar os números complexos por meio de uma equação de 2º grau com discriminante negativo "[...] cria uma falsa impressão, já que, historicamente, **não** foram as equações de segundo grau que levaram à introdução dos números complexos" (MILIES, 1993, p.5, **grifo nosso**).

Para Sfard (1991), um primeiro estágio para se iniciar um trabalho didático com os números complexos seria propiciar aos alunos a compreensão do significado da unidade imaginária. Lopes, Cabral e Alves (2011) reforçam esta posição, pois muitos alunos do Ensino Médio conservam, erroneamente, a falsa concepção "[...] que não existe um número que elevado ao quadrado seja igual a um número negativo" (p. 2).

Uma possível contribuição ao entendimento dos alunos em relação à unidade imaginária poderia situar a imagem conceitual e definição conceitual defendidas por Tall e Vinner (1981). Vale relembrar que uma definição formal, em Matemática, é aquela aceita pela comunidade matemática. Em contrapartida, os autores apontam que a 'definição conceitual' é pessoal, ou seja, remete ao que o indivíduo dispõe e que pode diferir da definição formal.

Tall e Vinner (1981) observam que a definição conceitual pode ser adquirida:

> […] por um indivíduo de maneira mecânica ou aprendida de modo mais significativo, e relacionada em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal pelo aluno de uma definição. Ela é, então, a forma de palavras que o aluno usa para explicitar sua própria imagem conceitual (evocada)[2] (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição conceitual deveria ser precedida pelo levantamento da imagem conceitual dos indivíduos. A imagem conceitual representa:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, a qual inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todas as espécies, e que muda sempre que o indivíduo encontra novos estímulos e maturidade[3] (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

---

[1] […] a symbol or name which enables it to be communicated and aids in its mental manipulation. But the total cognitive structure which colors the meaning of the concept is far greater than the evocation of a single symbol. It is more than any mental picture, be it pictorial, symbolic or otherwise.

[2] […] by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image.

[3] […] the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.

ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.27, N.1, 2021 – P. 159 - 178

A imagem conceitual evocada de um indivíduo inclui as representações verbais e não verbais, propriedades e processos associados, que podem estar em correlação com a definição formal. Porém, a imagem conceitual pode "[…] não ser globalmente coerente e pode ter aspectos bastante distintos da definição formal do conceito[4]" (TALL; VINNER, 1981, p. 151).

Nordlander e Nordlander (2012) categorizaram a imagem conceitual dos números complexos a partir do referencial de Tall e Vinner (1981). O estudo se realizou através de questionários com alunos suecos do segmento de ensino que corresponde ao Ensino Médio brasileiro. Para os sujeitos da pesquisa, a imagem conceitual dos números complexos perpassa: (a) um artifício matemático; (b) uma visão bidimensional; (c) uma visão simbólica; (d) uma visão de mistério (NORDLANDER; NORDLANDER, 2012, p. 637)[5].

Nordlander e Nordlander (2012) apontam que a categoria artifício matemático se situa na concepção histórica apresentada em Sfard (1991), autora que interpreta os números complexos como ferramenta para resolver problemas. Nesse enfoque, Nordlander e Nordlander (2012) consideram que os estudantes têm uma imagem conceitual dos números complexos como uma invenção ou um artifício humano não vinculado à realidade.

Na visão bidimensional Nordlander e Nordlander (2012) consideram que os alunos concebem o termo 'complexo' como uma entidade envolvendo partes distintas, mas que de alguma maneira estão interrelacionadas. Os autores apontam que, para os alunos, a forma a+bi não representa um número, mas "[...] uma entidade única que combina um número real e um número imaginário" (NORDLANDER, M. C.; NORDLANDER, 2012, p. 632).

Na visão simbólica os alunos consideram o símbolo $\sqrt{-1}$ ou 'i' como um modo natural de se identificar ou representar um objeto matemático. Por último, a visão de mistério retrata a imagem conceitual dos números complexos em considerar o subjetivo, crenças ou aspectos emocionais, o que representa uma fuga do aspecto cognitivo devido a dificuldades de compreensão do aluno com relação a este objeto matemático.

A partir da ideia de imagem conceitual apontamos o estudo da epistemologia dos números complexos como um dos possíveis caminhos para tratar a questão. Puhl e Lima (2014) propõem o estudo dos números complexos por meio "[...] da manipulação e análise de vetores para fazer surgir a unidade imaginária, como um operador que gira em 90º e um vetor não nulo" (p. 52). A justificativa da escolha é que o tópico vetores é trabalhado na disciplina de Física, no Ensino Médio, e retomado para os estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática ou Ciências.

Carneiro (2004a; b) e Fontes e Muniz (2013) destacam uma maior exploração da abordagem geométrica dos números complexos. Em termos epistemológicos, apresentar os números complexos como pontos (ou afixos) no Plano de Argand-Gauss situa uma abordagem geométrica por analogia do R^2 como vetores do plano, o que configura um isomorfismo entre os espaços vetoriais C e R^2, e que está associado a um vínculo de concretude. O "[...] isomorfismo das estruturas $\varphi : (C, +, .) \longrightarrow (R^2, +, .)$, $a + ib \longrightarrow (a, b)$ permite uma ligação

[4] [...] not be globally coherent and may have aspects which are quite different from the formal concept definition.

[5] […] (a) a mathematical artífice; (B) the two-dimensional view (c) the symbolic view; (d) the mystery view (NORDLANDER; NORDLANDER, 2012, p. 637).

ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.27, N.1, 2021 – P. 159 - 178

entre a representação abstrata dos números complexos por um viés concreto[6]" (GHEDAMSI, 2017, p. 2066).

3 A METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa se pautou nas manifestações verbais e escritas dos alunos de uma Licenciatura em Ciências a respeito das imagens conceituais envolvendo os complexos. A metodologia escolhida foi de natureza qualitativa e consistiu em uma sessão inicial de debates, a partir de questionamentos feitos pelo pesquisador, que buscou averiguar qual a imagem conceitual que os alunos possuem com relação aos números complexos e, em particular, da unidade imaginária.

A partir das imagens conceituais evocadas pelos sujeitos, na 1ª sessão, propusemos uma intervenção didática constituída de uma atividade que partiu da definição formal de unidade imaginária dada por $i=\sqrt{-1}$, no quadro aritmético. A intencionalidade era provocar uma reelaboração por parte dos alunos, a fim de que possibilitasse e incrementasse a imagem conceitual em um quadro geométrico.

A 'intervenção didática' foi inspirada e adaptada a partir das três fases iniciais da dialética ferramenta-objeto, de Douady (1986), como forma de metodologia que permitisse diagnosticar o entorno de certa realidade, mas que ainda pudesse promover uma interferência deliberada (do pesquisador, no presente caso). A interferência foi inspirada em Vygotsky (2000), pois a atividade problematizadora previa debates com os sujeitos da pesquisa de modo a viabilizar a explicitação e incremento das imagens conceituais.

Artigue e Dedelic (1992) comentam que o tema dos números complexos pode se tornar de interesse e objeto de estudo da atividade matemática, quando se colocam situações envolvendo a mudança de quadros e a dialética ferramenta-objeto, tomando como referência os estudos de Douady (1986).

Para modelar a Dialética Ferramenta-Objeto, a proposta de Douady (1986) considera as seguintes etapas: (a) 'Antigo', onde os alunos mobilizam parte de seus conhecimentos anteriores, que funcionam como ferramenta implícita diante da resolução de uma situação; (b) 'Pesquisas', momento onde os alunos buscam um novo conhecimento, que eles ainda não dispõem, para a resolução da tarefa; (c) 'Explicitação' ou 'Institucionalização local', ocasião na qual os alunos colocam em evidência os conhecimentos que conseguiram (ou parte deles), momento onde pode emergir conflito entre os conhecimentos antigos e os que estão sendo criados; (d) 'Novo implícito' ou 'Institucionalização', oportunidade de ocorrer síntese dos conhecimentos obtidos, geralmente realizada pelo pesquisador (professor) diante dos resultados obtidos pelos alunos, instante em que se atribui o estatuto de objeto aos conhecimentos obtidos; (e) 'Familiarização' ou 'Reutilização', circunstância onde os novos conhecimentos (já com o estatuto de objeto) poderão ser operacionalizados, na forma de ferramenta, de modo que o aluno possa reutilizá-los em novas atividades matemáticas.

Na 2ª sessão, prevista para durar duas aulas, adaptamos as três etapas iniciais da proposta de Douady (1986), ou seja, o 'Antigo', as 'Pesquisas' e a 'Institucionalização Local', de modo a averiguar se a imagem conceitual poderia ser incrementada a partir da aplicação da atividade.

[6] [...] isomorphism of fields $\phi : (C, +, .) \longrightarrow (R^2, +, .)$, $a + ib \longrightarrow (a, b)$ permits to link the abstract representation of the complex numbers to a more concrete one.

Observamos que na Dialética Ferramenta-Objeto os conceitos de quadro e mudança de quadros são fundamentais. Quadro representa um conjunto de “[...] ferramentas de uma parte da Matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações” (DOUADY, 1986, p. 389).

Maranhão (2002) elucida que, na concepção de Douady (1986)**,** ‘Quadro’ remete a um domínio de conhecimentos que correspondem aos diversos saberes da Matemática como conceitos, definições, propriedades e procedimentos. Ainda, Maranhão (2002) destaca que no mínimo deve haver dois quadros envolvidos nas etapas da referida autora.

Maranhão (2008) aponta que a proposta de Douady busca avivar “[...] o máximo possível, as relações matematicamente importantes entre as noções e certo número de outras, interessantes, no contexto do problema” (p. 133). O referido pressuposto, para a autora, permite a construção de situações didáticas em que existe uma frequente interação entre domínios que possam promover um caminho para dar o estatuto de objetos aos conhecimentos mobilizados pelos alunos.

Assim, foi proposta uma 2ª sessão envolvendo registros escritos e orais, a seis licenciandos voluntários do 5º semestre de um curso de Licenciatura em Ciências de uma universidade pública do estado de São Paulo, em horário extra-aula.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA 1ª SESSÃO

A sessão inicial constou de uma sondagem, na qual buscamos averiguar a imagem conceitual dos sujeitos da pesquisa sobre os números complexos e, em particular, da unidade imaginária. Consideramos essencial, para tal finalidade, situar um ambiente que incentivasse discussões, onde os conhecimentos prévios com relação à vivência escolar dos sujeitos da pesquisa, sobre o tema, pudessem ser explicitados. Destacamos que a intenção dos diálogos foi promover uma abertura para novas relações e conexões com elementos latentes, o que pode favorecer a reconstrução de outros elementos ou ideias.

Para iniciar o assunto, perguntamos: O que é a unidade imaginária?

> Aluno 01: Vou pegar a história dos conjuntos numéricos. Houve a necessidade humana ... As pessoas começaram a ter a necessidade de ter um ... de estudar os números naturais, depois os inteiros, os racionais e assim por diante. Acredito eu que, em determinado momento, os números imaginários vieram a ser necessários.

Em face desta colocação, perguntamos: Mas o que a unidade imaginária tem a haver com esta história que você contou?

> Aluno 02: Acredito que esta história vem bem antes. Por que o problema com as raízes de números negativos começam com os babilônios, que eu li em artigos de História das Ciências. Quem resolveu estes problemas foi um pioneiro nisto - Tartaglia - um matemático italiano. Gioseppe Cardano também trabalhou com isto e Evariste Galois também. Na verdade foram os babilônios que propuseram o problema, mas eles não sabiam as fórmulas para resolvê-los.

Estas afirmações do aluno 01 transparecem a visão de ‘artifício matemático’ proposta por Nordlander e Nordlander (2012), pois os números complexos se situam como uma extensão dos números reais devido ao fato que os povos antigos conheciam somente métodos particulares de resolver algumas situações envoltas no tema.

Em vista de nenhum aluno se posicionar sobre a unidade imaginária, decidimos abrir o posicionamento sobre o tema: Que mais vocês sabem dos números complexos?

> Aluno 02: A forma trigonométrica. O módulo de z é raiz quadrada de x ao quadrado mais y ao quadrado $(|z| = \sqrt{x^2 + y^2})$, mas tem condições: $x = |z|.\cos\theta = e \quad y = |z|.sen\theta.$
>
> Depois, vem aquela relação do módulo ser a.cosθ [Esta última frase é um erro conceitual do aluno][7].
> Pesquisador: Você memorizou estas relações ou utiliza algum recurso?
> Aluno 02: Na verdade eu memorizei no cursinho.
> Aluno 03: Eu me lembro disso utilizando o plano cartesiano. O plano 'x' é o plano real e o plano 'y' é o imaginário [O correto é eixo, não plano]. É isto? **Pega um número arbitrário no 'x', que eu vou chamar de 'a' ... um número arbitrário no 'y' que eu vou chamar de 'b'. Ai vou unir estes pontos** .... com um retângulo ... vou calcular a distância ... ai tem o ângulo ... téta ... e a distância é o módulo .... alguns chamam de 'rô' [grifos nossos].

As manifestações dos alunos 02 e 03 fornecem indícios da 'visão bidimensional' dos números complexos, conforme Nordlander e Nordlander (2012), onde os alunos creêm que o número complexo não é um objeto, mas sim uma composição de duas entidades. Isto está explícito na fala do aluno 03, destacada em negrito na fala anterior.

Decidimos seguir os comentários dos alunos e perguntamos: Então, o número complexo está associado ao plano cartesiano. É isto mesmo?

> Aluno 03: Plano de Gauss.
> Pesquisador: Ou plano de Argand-Gauss. Mas vocês acham que ele representa o mesmo que o plano cartesiano? Sim ou não?
> Aluno 04: É muito parecido ....
> Pesquisador: Sim ou não?
> Aluno 04: É muito parecido .... Sim.
> Aluno 02: Não.
> Aluno 05: Não.
> Aluno 06: Não.
> Aluno 03: Não.

Em face de uma maior participação dos alunos, destacamos que o 'não' foi uma resposta majoritária. Daí, fizemos nova colocação: Realmente, não representam a mesma coisa. Alguém tem um argumento para justificar porque não são o mesmo plano?

> Aluno 03: O eixo 'y', no plano de Gauss, é outro tipo de número. Tem outro significado ... é outro campo de conhecimento. No plano cartesiano são tomados dois conjuntos numéricos iguais.
> Pesquisador: E que conjunto numérico é este?
> Aluno 02: Números reais.

Continuamos a explorar um pouco mais sobre as imagens conceituais dos alunos em relação ao Plano Cartesiano e o Plano de Argand-Gauss.

> Pesquisador: Planos são nomeados de modo diferente porque tem componentes diferentes. Não haveria necessidade de manter nomes diferentes para coisas iguais. O que vocês acham?

[7] As falas entre colchetes representam comentários do pesquisador referente às falas dos alunos.

> Aluno 01: Eu imaginei como se fosse o caso da fórmula de Bháskara[8] .. que no Brasil é chamada assim ... mas em outros lugares é denominada de fórmula resolutiva. .... Eu imaginei que o plano cartesiano e o plano de Gauss fosse um caso parecido .... Que seriam coisas iguais, mas com nomes distintos.
> Aluno 03: Eu conheço a forma polar ...

Das manifestações verbais dos alunos nota-se que somente o aluno 03 consegue realizar uma distinção conceitual razoável, pois compreende que o Plano Cartesiano remete ao R^2 e o Plano de Gauss remete aos números complexos.

Em contrapartida, o aluno 01 não entende a diferença conceitual entre Plano Cartesiano e Plano de Gauss, pois utiliza uma associação intuitiva oriunda de outro campo de conhecimento (resolução de equação de 2º grau). Isto denota o que Nordlander e Nordlander (2012) denominam 'visão de mistério', pois o aluno utiliza a via intuitiva para escapar da visão cognitiva, o que impede a compreensão conceitual de certo tema.

Como se iniciou outro assunto dentro do tema dos complexos, resolvemos encaminhar as perguntas em torno da última exposição do aluno 03.

> P: Qual é a diferença da forma polar da forma trigonométrica?
> Aluno 03: Nos livros que eu estudei, por exemplo, falavam que era a mesma coisa.
> P: Isto mesmo, são nomes diferentes para a mesma coisa. Quais são as designações dos números complexos nesta forma?
> Aluno 03: A escrita na forma polar é $z = |z|.(\cos\theta + i.sen\theta)$.
> P: Como você se lembrou desta expressão?
> Aluno 03: Fazendo exercícios.
> P: E o que significa a letra 'i' que vocês mencionaram na forma polar.
> Aluno 03: É a unidade imaginária ... $i = \sqrt{-1}$.
> P: Vocês concordam?

Passado alguns instantes, em face do término das exposições, retomamos a questão: O que vocês podem acrescentar sobre os números complexos?

> Aluno 02: Também tem a forma conjugada, que é quando eu troco o sinal da parte imaginária, que é do tipo $\bar{z} = a - b.i$.
> Aluno 01: Eu já estou no meu limite do que estudei no Ensino Médio.
> Aluno 05: Eu não tive muita coisa. Eu tive a escrita na forma algébrica e muitos exercícios, incluindo um pouco de exercícios de potencias de 'i'. A professora falava que quando tiver uma raiz negativa, como raiz quadrada de -4, você coloca $4\sqrt{-1}$. e depois extrai a raiz quadrada, resultando 2i.
> Aluno 05: Também foi vista a forma polar.
> Aluno 06: Tive a forma algébrica, as potências do 'i', no Ensino Médio.
> Aluno 02: Esta matéria de números complexos eu tive no ensino técnico em eletrônica, no 1º ano.
> Aluno 04: Eu tive a forma conjugada, as potências e a forma algébrica.
> Aluno 02: Eu me lembro que tive a fórmula de Euler.
> Aluno 01: Eu também tive tudo isto. Mas não me lembro mais.

[8]A fórmula de resolução de uma equação de 2º grau que leva o nome de Bháskara não foi descoberta por ele, mas pelo hindu Sridhara, no século XI d.C.

Em síntese, as falas dos alunos durante a 1ª sessão revelaram que as imagens conceituais sobre os números complexos se situaram nos quatro níveis apontados por Nordlander e Nordlander (2012).

Em especial, com relação à unidade imaginária, foco desta pesquisa, ficou marcante uma imagem conceitual evocada pelos alunos como ferramenta implícita, na visão de artifício matemático para a manipulação da linguagem algébrica no desenvolvimento dos números complexos em sala de aula, conforme destacado em Nordlander e Nordlander (2012).

Outra imagem conceitual relativa à unidade imaginária dos alunos participantes desta pesquisa se situou principalmente na visão simbólica descrita em Nordlander e Nordlander (2012). Nessa concepção, os sujeitos da pesquisa associaram a unidade imaginária ao registro de representação semiótico designado por $i=\sqrt{-1}$.

Compondo as imagens conceituais, a unidade imaginária representa para os estudantes de licenciatura em Ciências uma letra que faz parte de uma definição formal de números complexos e, assim, é utilizado como ferramenta em operações matemáticas, dispensando maiores atenções ou entendimento conceitual.

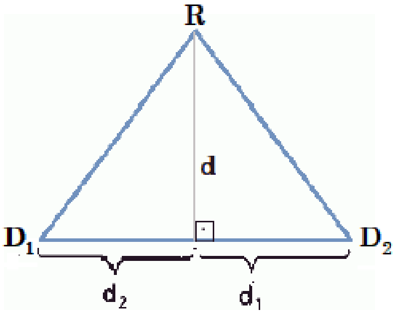
5 A 2ª SESSÃO: CONCEPÇÃO E AS ANÁLISES PRÉVIAS

Na segunda sessão tivemos como proposta um processo de ampliação da imagem conceitual da unidade imaginária pelo recurso da média geométrica entre os segmentos orientados '1' e '-1'. O referido processo permite aos alunos a percepção de que a média geométrica destes dois segmentos orientados se encontra a 90º, possui módulo unitário e, daí, associa-se a este segmento orientado um registro de representação semiótico próprio, que foi designado por 'i', a unidade imaginária, no decurso da construção do saber matemático.

Para significar a unidade imaginária aos licenciandos do curso de licenciatura em Ciências nos propusemos a elaborar e aplicar uma intervenção didática inspirada nas três fases iniciais da dialética ferramenta-objeto, proposta em Douady (1986).

Hellmich (1992) cita uma interpretação geométrica atribuída a Wessel e Argand, ilustrada na figura 1, onde se tem $d^2=d_1.d_2$, por meio do conceito de média geométrica entre dois números reais. Considerando-se $d_1=1$ e $d_2=-1$, tem-se $d=\sqrt{d_1.d_2}=\sqrt{1.(-1)}=\sqrt{-1}=i$.

Figura 1- Interpretação geométrica de por Wessel e Argand.



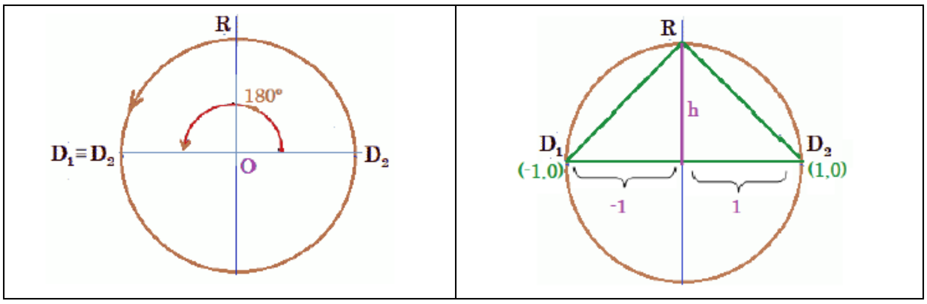
Fonte: HELLMICH (1992, p. 63).

ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.27, N.1, 2021 – P. 159 - 178

Adaptamos esta situação geométrica considerando um círculo de raio unitário, com centro O e com raio $d_1 = 1$, conforme a figura 2. Consideramos um eixo horizontal com centro em O, de modo que $d_2 = -1$ é obtido por rotação de 180º, no sentido anti-horário, onde D_1 se sobrepõe a D_2.

Optamos pela rotação de 180º, pois Conner et al. (2007) perceberam que muitos professores secundaristas consideram a multiplicação de um número real por um número negativo como um processo de reflexão em relação a origem no eixo real ou como o oposto do número real. Porém, os autores destacam a importância deste processo ser encarado como uma rotação de 180º, fato pouco observado pelos professores da pesquisa de Conner et al. (2007).

Figura 2 - Interpretação geométrica de $\sqrt{-1}$.



Fonte: O autor.

Aplicando-se o conceito de média geométrica: $h = \sqrt{d_1.d_2} = \sqrt{1.(-1)} = \sqrt{-1} = i.$ Assim, este novo elemento 'i' se situa sobre o eixo vertical, a partir de uma rotação de 90º em sentido anti-horário. Nestes moldes, a intervenção didática elaborada está indicada no Quadro 01.

Quadro 01 - Concepção da intervenção didática (2ª sessão).

Um número complexo pode ser representado na forma algébrica **z** = x + iy, onde $i = \sqrt{-1}$. Mas o que significa a unidade imaginária 'i'? Para responder a esta questão, faremos uma retrospectiva de alguns conceitos que foram levantados a partir do debate realizado anteriormente. A unidade imaginária, designada pela letra 'i' é definida por $i = \sqrt{-1}$. Ela representa a raiz quadrada de um número inteiro negativo, no caso '-1'. O debate da 1ª sessão propiciou rememorar que no campo dos números reais esta raiz não existe, mas é utilizada no campo dos complexos. Questão 1: A raiz quadrada de um número real pode ser obtida a partir de um conhecimento matemático: a média geométrica de dois números reais 'a' e 'b' positivos representa a raiz quadrada do produto destes dois números, ou seja: $Média\ geométrica = \sqrt{a.b}$. Você sabe representar uma média geométrica de dois números reais na forma geométrica? Caso não saiba, realize pesquisas na internet para obter a raiz quadrada do número 4, na forma geométrica. Questão 2: (a) A partir das pesquisas feitas por vocês pede-se obter a média geométrica de '1' e '4', desenhando no espaço abaixo de modo aproximado (um esboço, sem régua e compasso). (b) Indique no desenho que você fez qual o valor de $\sqrt{4}$.

Questão 3: É possível utilizar este processo geométrico para representar a raiz quadrada de um número negativo. Como isto é possível? Pense na solução para o caso de se obter, geometricamente, $\sqrt{-4}$. Permitida a consulta a internet. Questão 4: (a) Obter a média geométrica entre '-1' e '4'; (b) Obter $\sqrt{-1}$. Questão 5: Em sua opinião, quando se faz a adaptação do processo de média geométrica onde um dos números é negativo, o processo situa o Plano Cartesiano? E como vocês interpretam a unidade imaginária neste contexto? Explique.

Fonte: O autor.

Na 1ª questão, o problema matemático solicita se obter a média geométrica de dois números reais na forma gráfica, que remete ao currículo da escolaridade básica. Entretanto, isto não é, em geral, do conhecimento dos alunos secundaristas. A concepção da intervenção didática proposta situou a possibilidade de mudança do quadro aritmético para o quadro geométrico.

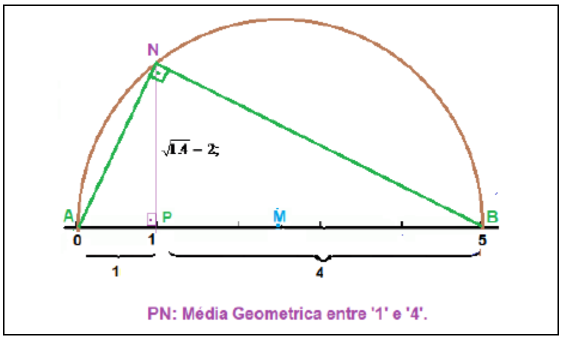
A abertura para as pesquisas priorizou a busca na Internet, disponível na sala onde foi realizada a atividade. Ainda, cabia ao aluno perceber que a média geométrica entre dois números reais positivos representa a raiz quadrada do produto dos dois números positivos, ou seja: $Média\, geométrica = \sqrt{a.b}$, onde a>0 e b>0.

Foi preparada uma primeira etapa de institucionalização local para prover informações para evitar o bloqueio da situação, caso houvesse necessidade. Na questão 2 o aluno teria que representar geometricamente a média geométrica, conforme o Quadro 02.

A questão 3 demandava que os alunos pudessem fazer uma adaptação do que foi trabalhado anteriormente e representassem, primeiramente, o segmento $\sqrt{-4}$ como sendo $\sqrt{(-1).4}$, e depois representassem os segmentos orientados -1 e 4 na reta real. A partir daí, era necessário a aplicação do processo de construção da média geométrica para obter o que a questão solicitava.

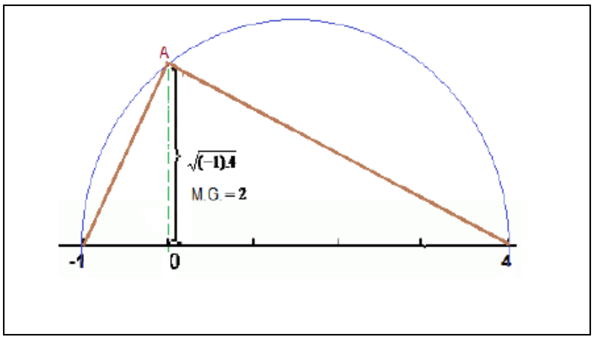
Caso necessitassem, a consulta a internet foi liberada, assim como foi prevista uma segunda etapa de institucionalização local, onde o debate entre alunos ou entre alunos e pesquisador poderia emergir a ideia exposta no Quadro 03.

Quadro 02 - Média Geométrica entre 1 e 4.



Fonte: O autor

Quadro 03 - Média Geométrica entre -1 e 4.



Fonte: O autor

Por último, na questão 5, a ideia era que os alunos discutissem a adaptação realizada no processo de construção geométrica quando um dos fatores é um número real negativo, e que isto implicava na mudança de conjunto numérico e um novo tipo de plano. Este lugar é conhecido como Plano de Gauss, onde a unidade imaginária pode ser pensada com um segmento orientado unitário (versor) ou como um ponto (Afixo), que forma 90º com o eixo real.

6 A 2ª SESSÃO: A APLICAÇÃO E A ANÁLISE DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA

Em sequência à sondagem da 1ª sessão, foi solicitado aos alunos se posicionarem, espontaneamente, em duplas[9]. Em seguida, foi entregue a folha com a 1ª questão a ser desenvolvida na 2ª sessão da etapa de experimentação, representada no Quadro 01.

Os alunos foram orientados do recebimento posterior e sequencial das outras questões, de modo que eles resolveriam uma questão por vez, com autonomia, podendo conversar e discutir com seu colega da dupla, mas não poderiam realizar consulta com o pesquisador ou com as demais duplas. Haveria momentos em que eles fariam uma comunicação no coletivo sobre o que eles produziram, intermediado pelo pesquisador.

Solicitamos que deixassem todo e qualquer procedimento registrado no papel, para que pudéssemos acompanhar e observar o raciocínio produzido por eles. Foi também informado que os debates seriam registrados em áudio e, ainda, era permitido utilizar a internet.

No início da 1ª sessão, após alguns minutos, percebemos que a questão 1 estava sendo considerada difícil pelas duplas D_2 e D_3. Porém, a dupla D_1 tinha conseguido dados pela internet e começavam a elaborar a solução. Segue alguns trechos da conversa entre o aluno 1 e 2.

> Aluno 1: Dá 2 e alguma coisinha. Que é raiz quadrada de 5.
> Aluno 2: Neste caso seria raiz quadrado de quatro, que seria dois.
> Aluno 01: Se você pegar a medida aqui, dá dois, certinho. A altura. [fez uso de uma régua e um compasso, com pouca precisão, num rascunho bem feito, no espaço reservado para a justificativa].

[9] A dupla 01 (D_1) foi composta pelos alunos 1 e 2, a dupla 02 (D_2) pelos alunos 3 e 4 e a dupla 03 (D_3) pelos alunos 5 e 6. O termo 'aluno' pode se referir a um discente do gênero masculino ou feminino.

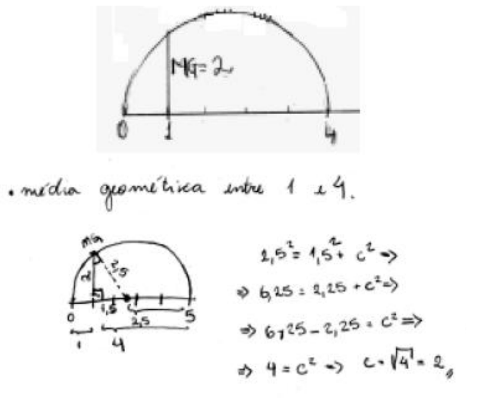
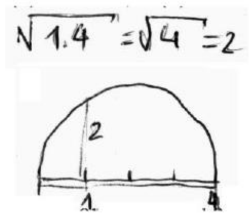
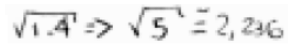
ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.27, N.1, 2021 – P. 159 - 178

> Aluno 01: Então, a média geométrica é dois.
> Aluno 02: Sim.
> Aluno 01: Dá um pouquinho mais que dois [se referindo a medida].

Pelas falas, percebemos que eles ainda não estavam associando a média geométrica ao conceito de raiz quadrada de quatro. Para não bloquear a atividade, resolvemos abrir a sessão de debates da institucionalização local. Perguntamos a todos os alunos o que eles haviam discutido ou resolvido na questão 1. Após alguns instantes, a dupla D_1 explicou o processo.

Os alunos das outras duplas somente escutaram, um indício que ainda não estavam preparados para continuar. Daí, apontamos que na folha havia 'links' de Internet recomendados para observarem o processo. Sugerimos algumas vídeoaulas[10], o que prontamente acessaram, inclusive pela dupla D_1 que havia encontrado a solução. O protocolo 1 indica as respostas encontradas pelas três duplas.

Protocolo 01 - Respostas a questão 2.

		 
Dupla 01	Dupla 02	Dupla 03

Fonte: O autor.

No protocolo 1 observa-se que após a etapa das 'novas pesquisas', advindas da Internet, a dupla D_2 conseguiu obter a solução, mas elaborou um rascunho errôneo das medidas. A dupla D_1 retomou a questão e elaborou uma justificativa diferente para o valor da média geométrica, utilizando o teorema de Pitágoras. Quanto à dupla D_3, esta não respondeu corretamente a questão.

Após a elaboração das respostas, tendo observado que a dupla D_3 não havia conseguido a resposta, solicitamos as duplas recolocarem suas descobertas. A dupla D_1 explicou a 'nova' solução encontrada utilizando o teorema de Pitágoras, fato que interessou a dupla D_2. A dupla D_3 não comentou a solução, o que nos levou a conversar com a dupla. Porém, as mesmas não souberam explicar o que fizeram na solução, o que nos leva a crer que foi uma tentativa de manipulação numérica sem raciocínio algum envolvido.

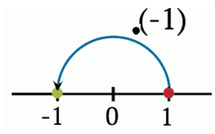
A seguir, perguntamos se até o momento havia algum questionamento por partes deles. Não havendo manifestação, prosseguimos entregando uma folha com o enunciado da questão

[10] https://www.youtube.com/watch?v=MXcBUGIlAwU ou https://www.youtube.com/watch?v=pcHskGRcsPE

3. Desta vez, mesmo com a consulta a internet, o que demandou certo tempo, as três duplas de alunos não encontraram resposta.

Para não bloquear a atividade, passamos a realizar uma segunda institucionalização local, indicando alguns itens na lousa, cuja replica foi colocada no Quadro 04.

Quadro 04 - Segunda institucionalização local.

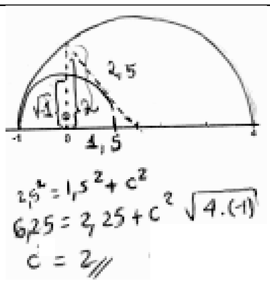
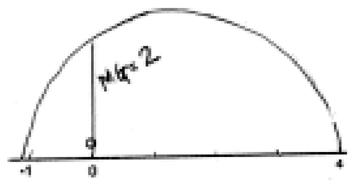
É possível representar o valor oposto de um número inteiro positivo por meio da representação gráfica. Considerem o oposto do número '1'. Para isto, poderia simplesmente marcar a medida '1' a esquerda da origem. Outra possibilidade é efetuar um giro de 180º, no sentido anti-horário, para se encontrar a medida de '-1'. Observe esta segunda possibilidade na figura ao lado. Assim, para se obter a média geométrica entre '-1' e '4', marca-se o segmento orientado '-1' e 4, na reta real. A partir daí, pode-se obter a média geométrica entre '-1' e '4', a partir do que está representado na reta real indicada abaixo. 	

Fonte: O autor

Após esta segunda institucionalização local, entregamos uma folha com o enunciado da questão 04, com dois itens. As duplas D_1 e D_2 prontamente começaram a discutir e encaminharam a solução, conseguindo resolver a questão 4, item (a).

O Protocolo 02 apresenta as respostas a questão 4, item (a).

Protocolo 02 - Respostas a questão 4, item (a).

		
Dupla 01		Dupla 02

Fonte: O autor.

A dupla D_3 não esboçou qualquer tipo de tentativa. Ao observarmos que a referida dupla não estava resolvendo a questão, perguntamos se havia dúvidas a respeito da institucionalização. Os alunos se entreolharam e responderam que estavam pensando. Nada mais comentaram.

Na dupla D_2 seguem as falas durante a execução da questão 4, item (a).

> Aluno 04: Nós temos que representar graficamente, mas utilizando o 'menos um' e o quatro.
> Aluno 03: Por aqui [apontou para a folha, no enunciado da questão], ele está pedindo o módulo?
> Aluno 04: Não sei.
> Aluno 03: Não? O valor pedido vai ser negativo?

> Aluno 04: Vai ter que traçar a altura ... aqui tem dois ... então ... o módulo vale dois.

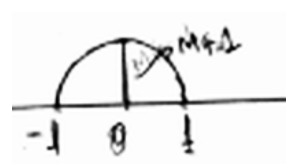
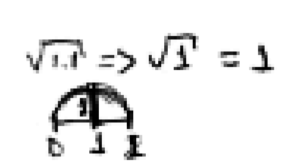
Na dupla D_1 houve pouca comunicação.

> Aluno 02: Aqui está a representação gráfica. Veja a reta que o professor utilizou na explicação [O aluno apontou para a lousa].
> Aluno 01: Ah ... sim. Basta fazer o processo igual ao anterior, mas o ‘1’ fica representado para o lado esquerdo, pois é negativo.
> Aluno 02: Então está feito. Vamos aplicar o Pitágoras ... como no anterior.
> Aluno 01: Deu 2 ... também.
> Aluno 02: Seria dois vezes i ao quadrado ... Não ... dois vezes i. Eu acho que é isto.

Quanto a questão 04, parte b, que solicitava representar $\sqrt{-1}$, as duplas D_1 e D_2 resolveram de modo análogo ao item a, fato que podemos denotar a partir das falas da dupla D_1.

> Aluno 01: Então vamos representar raiz quadrada de -1 .... seria mesma coisa ...
> Aluno 02: Aqui nós fizemos novamente o procedimento ....

Protocolo 03 - Resolução da Questão 04, item (b).

		
Dupla 01		Dupla 02

Fonte: O autor.

Na sequência, ao entregarmos a folha contendo a questão 5, os alunos começaram a realizar um intenso debate entre eles. Então, solicitamos que ao invés de conversarem na dupla, fizessem o debate com o grupo, ao qual todos concordaram.

> Aluno 01: Nesta representação [o aluno apontou para a lousa, quando aconteceu a 2ª institucionalização local], além de dar a direção para onde está apontando ‘i’, que é $\sqrt{-1}$ ..., o comprimento representa o módulo, naquela direção. A gente associou a isto. Não é um vetor. A ideia é ter uma direção e o tamanho. Porque nesta representação a altura varia. Porém, a direção é sempre apontando para o mesmo eixo, naquele plano de Argand-Gauss.

Aqui, nos transpareceu que o aluno 01 considerou corretamente que a média geométrica, quando adaptada para o produto que contém uma parcela real negativa, recai no plano de Gauss e possui módulo unitário, pois ele representa a unidade imaginária. Porém, tem a imagem conceitual que o número complexo não pode ser representado por um vetor.

> Aluno 02: A reta dos números reais indica ... uma dimensão para a gente ... e os imaginários ... ela ... nos indica outra dimensão. Eu imaginei mais ou menos assim ... os números reais como se fossem a superfície de um lago, e os números imaginários fossem o que está acima do lago ... no ar ... ou dentro do lago.

Nessa fala, o aluno 02 utilizou uma metáfora, importante aporte para significar os conhecimentos. Levamos em conta que ele incrementou a imagem conceitual com relação a unidade imaginária, considerando que a parte imaginária de um número complexo representa uma das direções componentes do plano de Argand-Gauss (a direção vertical).

> Aluno 01: Mesmo porque todo número real pode ser escrito como uma parcela de um número complexo. **Vai ter a forma (0,i)**, ou seja, ele vai estar na forma real ... a parte complexa é nula ... no caso ... so tem ele, no eixo dos reais [O aluno associou erroneamente a unidade imaginária, representada por (0,i), a um número real].

Na passagem anterior, apesar do erro conceitual do registro de representação apontado, o aluno 01 verbalmente associa um número real a um complexo com parte imaginária nula.

> Aluno 02: Eu nunca tinha imaginado os números complexos nesta forma. Eu pensei que era somente para resolver o problema da raiz de -1. Não pensava que era uma direção ... uma localização ... e um eixo ... no plano de Argand-Gauss.

As falas denotam que a imagem conceitual, tanto do aluno 01, como do aluno e 02, está sendo um pouco incrementada. Ou seja, o quadro geométrico presente na intervenção didática acrescentou conhecimentos ao quadro numérico presente na definição de unidade imaginária.

Com relação ao aluno 03, a imagem conceitual começa a manifestar um melhor entendimento da unidade imaginária.

> Aluno 03: Na verdade, nós estamos pensando no comprimento do vetor. Tem o plano real ... o plano imaginário ... como o colega relatou [uma fala anterior, sobre o 'lago', do aluno 02]. Como se o plano real fosse a superfície e o imaginário fosse outra dimensão. Eu acredito que o número complexo tem um significado ... não é somente uma coisa simplesmente posta para a gente ... isto vale raiz quadrada de –1... Não ... ele tem um comprimento ... uma validade ... ele pode significar no campo dos complexos.

O aluno 03 manifesta uma percepção que os números complexos se associam a um módulo de um vetor, numa direção perpendicular ao eixo real, o que representa um incremento na imagem conceitual anterior como artifício matemático e visão simbólica.

A seguir, destacamos que o aluno 05 faz uma colocação, onde "o número 'i' é uma direção associada aos números reais".

> Aluno 05: Eu acho que é uma distância e ... como já foi falado ... uma distância na reta imaginária ... um sentido ... levando pelo lado do vetor .... que você consegue colocar ... É muito difícil falar sobre os complexos.

O aluno 05, apesar da pouca participação na pesquisa, mostrou indícios de percepção a respeito da unidade imaginária considerada como um 'número' em uma direção, o que é um passo para superar a visão de mistério que o aluno havia revelado na 1ª sessão. Porém, o aluno erroneamente menciona 'associada aos números reais', pois a direção forma 90º com o eixo real. Também, o aluno 05 não associou 'i' como um vetor.

A omissão, pelo aluno, em relação ao 'i' como um vetor revelou que a formação da imagem conceitual é algo complexo e demanda tempo. Não existe 'reta imaginária' (o correto é eixo imaginário). Vale ressaltar ainda que, o aluno expressou confusão de distância e lado do vetor (módulo de um número complexo ou módulo de um vetor).

7 CONCLUSÕES

As falas manifestas na 1ª sessão da pesquisa mostraram que as quatro categorias apontadas na pesquisa de Nordlander e Nordlander (2012) com relação a alunos suecos secundaristas se encontram presentes nas manifestações dos estudantes da licenciatura em Ciências no que tange aos números complexos: visão de artifício matemático como extensão dos números reais, um objeto de duas dimensões, um objeto simbólico e uma visão misteriosa.

A aplicação da intervenção didática na 2ª sessão causou certo impacto na imagem conceitual dos licenciandos em Ciências com relação aos números complexos. A imagem conceitual apresentou lacunas, sem haver necessariamente uma evolução linear e coerente.

> À medida que a imagem conceitual se desenvolve ela não precisa ser coerente todo o tempo. O cérebro não funciona assim. A entrada sensorial excita certas vias neuronais e inibe outras. Dessa maneira, estímulos diferentes podem ativar diferentes partes da imagem conceitual, desenvolvendo-os de uma maneira que não precise formar um todo coerente[11] (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

No ensino usual, os números complexos geralmente são trabalhados no quadro algébrico, o que reforça o aspecto de abstração. Nesse sentido, as atividades se situaram em uma possibilidade de jogo entre os quadros numérico, algébrico e geométrico, que favorecem uma entrada concreta por meio da mudança de quadros. Isto representa um enfoque alternativo a apresentação abstrata e teórica usual dos materiais escolares, o que coaduna com as observações de Nordlander e Nordlander (2012) e Ghedamsi (2017).

As manifestações das imagens conceituais dos sujeitos da pesquisa revelaram que a mudança de quadros é um fator essencial. Assim, a mudança do quadro numérico (a definição formal de unidade imaginária) para o quadro geométrico propiciado pelo processo de determinação da média geométrica entre dois números reais foi importante para promover certo incremento na imagem conceitual dos alunos com relação à unidade imaginária.

A contribuição de Doaudy (1986) com a mudança de quadros pode ser considerada como uma condição necessária para que o aluno possa melhorar a imagem conceitual dos conhecimentos trabalhados na escolaridade básica. Esperamos que esta pesquisa possa estimular a percepção que as situações em sala de aula são enriquecidas pela mudança entre quadros e, em especial, a exploração de atividades no quadro geométrico pode promover uma melhoria ao significado dos conhecimentos matemáticos.

A proposição de uma atividade para explorar as mudanças de quadros por meio das manifestações verbais e escritas pode se constituir em uma estratégia de retorno em sala de aula para que os professores compreendem o que está sendo pensando pelos alunos. Isto pode favorecer a aprendizagem deste tema pelos alunos secundaristas e do ensino superior.

Considerando que trabalhamos com um conhecimento que remete ao currículo da escolaridade básica, e que alunos de um curso de licenciatura revelaram não disporem de uma imagem conceitual adequada sobre um princípio básico dos números complexos – a unidade

[11] As the concept image develops it need not be coherent at all. The brain does not work that way. Sensory input excites certain neuronal pathways and inhibits others. In this way different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole.

imaginária – tais considerações nos indicam que caberiam mais pesquisas inseridas na premissa da busca pelo significado dos objetos e, ainda, sobre o que os alunos compreendem a respeito de determinados conhecimentos matemáticos. Isto vale não somente no caso dos números complexos, mas pode ser estendido a outros temas de Matemática onde a imagem conceitual dos alunos necessita ser investigada.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p. 193-217.

ARTIGUE, M; DELEDICQ, A. Quatre étapes dans l´histoire dês nombres complexes: quelques commentaires épistemologiques et didactiques**. Institute de Recherche Pour L'enseignement dês Matematiques.** Paris VII, 1992.

CARNEIRO, J. P. A geometria e o ensino dos números complexos. **In: Anais ...** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004a. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>. Acesso em: 05 jul. 2016.

______________. Sobre a Geometria e o Ensino dos Números Complexos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 55, p 15-25, 2004b.

CONNER, M. E.; RASMUSSEN, C.; ZANDIEH, M.; SMITH, M. Mathematical knowledge for teaching: The case of complex numbers. **In: Anais …** Proceedings for the tenth special interest group of the mathematical association of America on research in undergraduate mathematics education. San Diego, CA, 2007.

DOUADY, R. Jeux Cadre et dialectiques outil-objet. **Recherche en Didáctique des Mathématiques.** Grenoble. La Penseé Sauvage-Éditions, v. 7.2, 1986, p. 5-31.

FONTES, C. A.; MUNIZ, R. S. S. Coordenadas polares no Ensino Médio: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos. **In: Anais ...** XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X. Disponível em: <http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3540_1977_ID.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2018.

GHEDAMSI, I. A micro-model of didactical variables to explore the mathematical organization of complex numbers at upper secondary level. **In: Anais ...** Proceedings of Cerme10. out. 2017. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/328043293>. Acesso em: 17 jul. 2018.

GRIMBERG, G. E. Gauss, os resíduos biquadráticos e a representação geométrica dos números complexos. **RBHM**, v. 14, n. 29, p. 145-166, 2014.

HELLMICH, E. W. Números Complexos: A História de $\sqrt{-1}$. In: BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**: Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. Cap. 11, p. 61-63.

LOPES, A. C. M.; CABRAL, V. P. G.; ALVES, F. J. C. Números complexos na vida real: uma abordagem sobre o ensino e algumas aplicações. **In: Anais ...** VIII Encontro Paraense de Educação Matemática Belém: SBEMPA, 2011. Disponível em: <http://www.sbempa.mat.br/Boletim/Anais/secoes%5CCC0103.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2015.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

MAOR, E. **e:** a história de um número. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

MARANHÃO, M. C. S. A. Dialética Ferramenta-Objeto. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Educação Matemática:** uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. 212p.

MILES, C. P. A Emergência dos Números Complexos. **Revista do professor de Matemática,** 2 sem. 1993, n. 24, p. 5-15.

PUHL, C. S.; LIMA, I. G. Interagindo com os Números complexos. **Revista Ensino de Ciências.** v. 5, n.2, jul.-dez. 2014.

ROSA, M. S. **Números Complexos:** Uma Abordagem Histórica para aquisição do conceito. 1998, 170f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies**, n. 22, v.1, 1991, p. 1–3.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, 1981. p. 151-169.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

ISSN – 1982-4866. REVISTA DYNAMIS. FURB, BLUMENAU, V.27, N.1, 2021 – P. 159 - 178