



O CÁLCULO E OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA: UM ESTADO DO CONHECIMENTO

THE CALCULUS AND THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS: A STATE OF KNOWLEDGE

Rafael Winícius da Silva Bueno
Mestre em Educação em Ciências e Matemática
Instituto Federal Farroupilha
rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br

Lori Viali
Doutor em Engenharia de Produção
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
viali@puccs.br

Resumo

O presente artigo apresenta uma pesquisa, denominada estado do conhecimento, que foi realizada com o objetivo de sistematizar e analisar a produção científica brasileira, em nível de pós-graduação *stricto sensu*, envolvendo o ensino e aprendizagem de conceitos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, no contexto da teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall. Para tanto, primeiramente foi selecionado o corpus de análise do estudo, sendo, então, realizada a leitura flutuante dos textos para a constituição das bibliografias anotada, sistematizada e categorizada. Analisando as informações encontradas, percebeu-se que ainda são poucas as pesquisas realizadas na perspectiva investigada e que as existentes se concentram no conceito de derivada e no ensino e aprendizagem voltado para cursos de Engenharia. Nesse sentido, a ausência de trabalhos, no corpus de análise sugerido, abordando o conceito de Integral, no contexto de Cursos de Licenciatura em Matemática, sob a ótica da teoria dos Três Mundos da Matemática, aponta uma direção e um sentido que ainda podem explorados em futuras investigações e, em especial, na tese que está sendo construída pelo primeiro autor desse artigo, sob orientação do segundo autor.

Palavras-chave: Cálculo; Três Mundos da Matemática; Estado do Conhecimento

Abstract

The present paper presents a research, named state of knowledge, which was made with the goal of systematizing and analyzing the Brazilian scientific production, on the *stricto sensu* post-graduate level, evolving teaching and learning concepts related to the Calculus, on the Three Worlds of Mathematics theory context, proposed by David Tall. To do it, first of all was selected the analysis *corpus* of the study, being, then, done the floating reading of the texts to build the noted, systematized and categorized bibliographies. Looking through the found informations, was realized that are still only a few researches made with the investigated perspective and that the existent ones focus on the derivate concept and on the teaching and learning focused on Engineering courses. On this regard, the lack of researches, on the suggested analysis *corpus*, about the Integral concept, on the context of Mathematics' Teacher formation courses, under the vision of the Three Worlds of Mathematics theory, points to a direction and orientation that still can be explored in future investigations and, most of all, on the thesis that is being built by the first author of this paper, under the orientation of the second one.

Keywords: Calculus; Three Worlds of Mathematics; State of Knowledge.

1 INTRODUÇÃO

Questões acerca do ensino e aprendizagem de conceitos inerentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral¹ são recorrentes, há algum tempo, no cenário do campo de pesquisa denominado Educação Matemática. Nesse contexto, observa-se que, apesar de os professores encarregados de lecionar tópicos sofisticados, como limite, derivada e integral, normalmente possuírem grande domínio matemático sobre o tema, esse conhecimento acaba não implicando diretamente no sucesso acadêmico de seus alunos.

No cenário mais comum, atualmente encontrado, os conceitos são apresentados como conhecimentos prontos que foram descobertos por grandes mentes de determinadas épocas e, a partir de então, definidos como novas ferramentas para transcender as fronteiras matemáticas estabelecidas. Parece não ser relevante o fato de, segundo D’Ambrósio (1997), o conhecimento ser gerado pela necessidade de respostas a problemas e situações distintas, estando, portanto, subordinado a um contexto histórico.

Apesar de situações envolvendo os sistemas de representação gráfico e tabular serem exploradas em alguns momentos, o ensino de Cálculo se concentra basicamente na construção de habilidades necessárias para aplicar técnicas algébricas para determinar limites, derivadas e integrais dos mais variados tipos de funções reais. Nesse sentido, de acordo com Demo (2005), acabam sendo priorizados métodos repetidos e repetitivos, preocupados apenas com a competência formal do estudante, visando, prioritariamente, a transmitir o conteúdo. Sobre esta realidade, abordando o conceito de derivada, Machado (1991) afirma:

Não se podem contestar as raízes geométricas e, sobretudo, as físicas, do seu nascimento. A noção de velocidade, as taxas de variação em geral, a noção de reta tangente, foram o substrato de onde emergiu a abstração unificadora. Entretanto que brutal inversão de perspectivas ocorre quando se passa a pensar na noção de derivada como algo em si, que inclusive “se aplica” ao real! Chega-se, algumas vezes, a pretender, por ingenuidade ou comodismo, que o aluno para entender o que é velocidade de uma partícula precisa conhecer antes a noção de derivada. É como se se dissesse que é necessário entender o esquema de funcionamento do aparelho respiratório para poder respirar. (p. 53).

É possível, então, imergindo nas pesquisas realizadas sobre o tema, deparar-se com trabalhos que retratam a realidade do ensino de Matemática que, segundo D’Ambrósio (1997), em grande parte, trata os alunos como um conjunto homogêneo e tem como resultado, excluindo-se as exceções, um aluno tolhido no seu comportamento, na sua inteligência e no seu potencial criativo. Essa situação causa efeitos nas disciplinas de Cálculo que, segundo Müller e Amaral (2012), são causa de grande parte das reprovações em cursos como engenharias e licenciaturas em Matemática ou Física, causando sérios problemas, como a elevada taxa de evasão, já nos primeiros semestres do Ensino Superior.

Artigue (1995) afirma que o ensino universitário, mesmo que tenha outras ambições, tende a centrar-se em uma prática algorítmica e algébrica do Cálculo e a avaliar apenas as competências adquiridas nesse domínio. Esse fenômeno acaba por deflagrar um círculo vicioso, pois, para tentar obter níveis aceitáveis de êxito, os professores procuram trabalhar com aquilo que os estudantes têm de melhor e esses, por sua vez, consideram essas competências como o essencial da disciplina, já que é o que constitui a base da sua avaliação. Constrói-se então um problema, pois, segundo Tall (1996), apesar de a matemática universitária ser uma extensão da matemática escolar, particularmente no que se refere às técnicas de utilização de métodos

¹ No restante do texto os autores se referirão ao Cálculo Diferencial e Integral apenas como Cálculo.

numéricos e algébricos, essa requer uma evolução, a partir da reconstrução de ideias antigas, para ingressar gradualmente na complexidade de métodos mais formais, que possibilitam a construção de novas teorias.

Nesse sentido, Artigue (1995) ressalta

[...] que se bem pode ensinar os estudantes a realizar de forma mais ou menos mecânica alguns cálculos de derivadas e primitivas e a resolver alguns problemas padrões, se encontram grandes dificuldades para fazê-los entrar de verdade no campo do cálculo e fazê-los alcançar uma compreensão satisfatória dos conceitos e métodos de pensamento que são o centro desse campo matemático. (p. 97).

Dessa forma, entrando em contato com os estudos de diferentes autores, pode-se verificar que a questão do ensino e aprendizagem dos conceitos envolvidos em disciplinas de Cálculo é realmente bastante relevante. Esse fato, agregado ao contexto profissional dos autores, justifica o interesse por esse tema para o desenvolvimento dessa pesquisa, que é parte integrante de um estudo mais abrangente, em nível de doutorado.

Tendo definido o foco disciplinar para essa investigação, foi-se a busca de teorias do desenvolvimento do pensamento humano que pudessem auxiliar na compreensão de como se dá a aprendizagem matemática. Nessa perspectiva, teve-se a oportunidade de entrar em contato com a Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall (2004; 2013), que a desenvolveu com o objetivo de ter uma visão ampla e completa do desenvolvimento cognitivo matemático. Segundo o autor, esse se constitui de uma reconstrução contínua de conexões mentais que evolui no desenvolvimento de estruturas do conhecimento cada vez mais sofisticadas e envolve os mundos: Conceitual Corporificado; Operacional Simbólico; e Formal Axiomático.

Entrando em contato com a teoria proposta por Tall, encontraram-se elementos que podem auxiliar no desenvolvimento do ensino e aprendizagem das disciplinas envolvendo conteúdos de Cálculo. Para analisar esse campo de pesquisa, envolvendo essas disciplinas e a Teoria dos Três Mundos da Matemática, realizou-se o presente estudo, denominado estado do conhecimento, que tem por objetivo sistematizar e analisar, nesse contexto, a produção científica brasileira, em nível de pós-graduação *stricto sensu* e que, conforme ressaltam Borges, Lima e Ramos (2018), pode indicar caminhos a serem traçados em novas investigações.

Sendo assim, o presente artigo traz o percurso percorrido nessa pesquisa, descrito em cinco seções. Na primeira, denominada de introdução, foi contextualizado o tema proposto, justificando o interesse dos autores, e foi descrito o objetivo da investigação. Na segunda seção, dedicada aos pressupostos teóricos, foram discutidas as ideias da teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall. Na terceira, são descritos os percursos metodológicos utilizados para construir o estado do conhecimento. A quinta seção traz a apresentação dos resultados encontrados e sua análise crítica. Na última, são feitas as considerações finais sobre o estudo realizado.

2 OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

David Tall é Professor Emérito do pensamento matemático na Universidade de Warwick, no Reino Unido, e se dedica ao estudo do sentido da Matemática e em como essa é ensinada e aprendida. Sua preocupação se debruça sobre o fato de que, enquanto alguns estudantes veem essa disciplina como algo incrível e belo, muitos outros encontram nela apenas fonte de problemas e ansiedade.

Nesse contexto, Tall (2013), na obra *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*, se propôs a realizar um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento matemático através de uma jornada desde os conceitos iniciais construídos por uma criança até os limites da pesquisa em Matemática. Esse trabalho resultou em uma teoria cognitiva denominada de Três Mundos da Matemática que é voltada para o ensino e aprendizagem dessa disciplina e que pode inclusive ser aplicada no estudo da sua construção histórica.

No seu trabalho, o autor afirma que o desenvolvimento do pensamento matemático é mais complexo do que simplesmente a adição de novas experiências a uma estrutura fixa de conhecimentos. Constitui-se em uma reconstrução contínua de conexões mentais que evoluem para formar, com o tempo, estruturas de conhecimento cada vez mais sofisticadas.

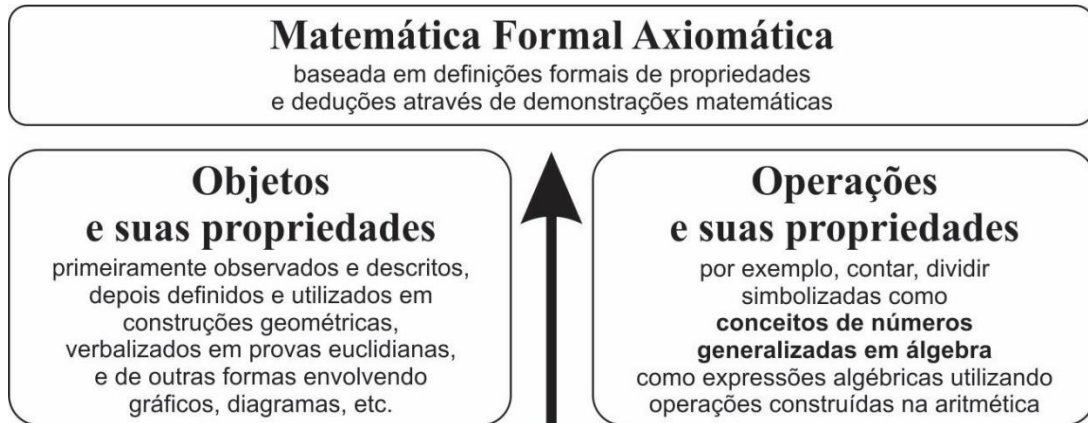
O estudo da geometria, por exemplo, começa com a criança brincando com objetos e reconhecendo suas características através dos sentidos e descrevendo-as através da sua língua materna. Com o tempo, essas características se tornam definições mais precisas até atingirem um estágio em que possam ser traduzidas em uma teoria formal, como a geometria euclidiana. Para aqueles que chegam à universidade, há ainda a possibilidade de um estudo de diferentes tipos de geometria, como a geometria diferencial, a topologia e a geometria não euclidiana.

O aprendizado da aritmética acontece de outro modo, enfatizando não as propriedades de objetos físicos, mas as ações que podem ser realizadas sobre esses objetos, tais como: contar, agrupar, ordenar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Essas ações acabam se tornando operações matemáticas e os símbolos são introduzidos para que essas acabem sendo feitas rotineiramente, sem grande esforço consciente. Posteriormente, elas podem deixar de ser vistas apenas como operações para serem realizadas para se tornarem também concepções que podem ser mentalmente manipuladas.

Já a álgebra emerge da generalização das operações estudadas em aritmética, com a manipulação algébrica seguindo as regras construídas no estudo anterior. Funções algébricas podem ser visualizadas através de gráficos e posteriormente estruturas algébricas podem ser formuladas em sistemas axiomáticos, como corpos, anéis e grupos.

Há então três formas distintas de conhecimento matemático. A primeira envolve o estudo de objetos e suas propriedades, que levam à criação de conceitos mentais descritos em linguagem materna. A segunda se desenvolve através do estudo da aritmética, levando à álgebra e culminando com formulação e resolução de problemas utilizando o simbolismo algébrico. A terceira forma nasce através do estudo formal da matemática pura e é catalisada através do estudo acadêmico avançado nas universidades. Essas questões levam a três maneiras nas quais o pensamento matemático é desenvolvido, dando origem então à teoria dos Três Mundos da Matemática.

Figura 1: Esquema para as três formas de conhecimento em Matemática



Fonte: Tall (2013).

O primeiro mundo, denominado de Conceitual Corporificado, é construído a partir das percepções e ações que acontecem no mundo real e se desenvolvem até a criação de imagens mentais cada vez mais sofisticadas. Nesse contexto, concepções que não pertencem a esse mundo real passam a ser mentalizadas como, por exemplo, uma linha perfeitamente reta. (TALL, 2004).

O conceito de corporificação, de acordo com Lima (2007), refere-se à observação, descrição, ação e reflexão sobre experiências que envolvem inicialmente objetos físicos, mas que evoluem até a construção de experiências mentais. Nesse caso, o indivíduo manipula o objeto no seu pensamento, observando-o, descrevendo-o, agindo e refletindo sobre ele. Essas experiências, por muitas vezes, também podem acabar por ser representadas, de alguma forma, com a ajuda de softwares ou outros recursos disponíveis.

O Mundo Operacional Simbólico envolve os símbolos utilizados em aritmética, álgebra e no Cálculo, por exemplo. Começa com ações que se desenvolvem até se tornarem processos matemáticos que podem ser trocados por conceitos para se pensar sobre. Enquanto alguns estudantes permanecem no nível dos processos, outros vão além e veem os símbolos como operações a serem realizadas e também como objetos a serem operados através do cálculo e da manipulação algébrica.

Lima (2007) afirma que esse mundo é composto por símbolos que representam ações e percepções que estão presentes no mundo corporificado. No estudo do conceito de integral, por exemplo, utiliza-se o símbolo $\int f(x)dx$ que envolve a percepção de que a função em questão deve ser integrada em relação à variável x e a ação de integrar, utilizando regras de integração, como $\int_a^b \cos x \, dx = \text{sen } b - \text{sen } a$, ou ainda a integração por substituição, frações parciais ou partes.

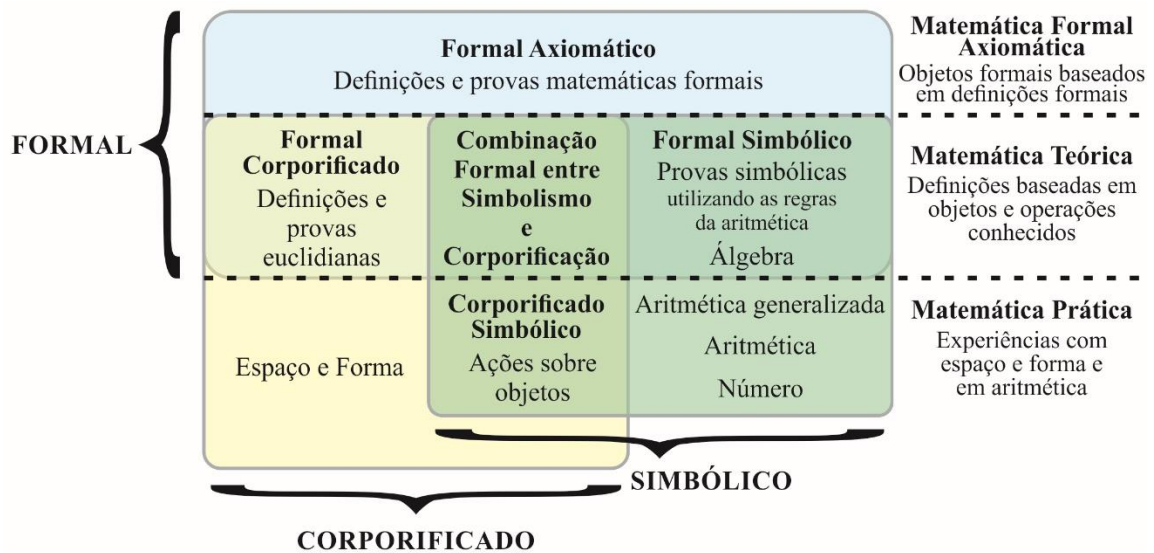
O terceiro mundo é o Formal Axiomático, no qual se constrói o conhecimento a partir de axiomas que geram teoremas, corolários, etc., cujas propriedades são deduzidas por demonstrações matemáticas rígidas. Nesse mundo não são utilizados apenas objetos sensoriais como base, mas experiências mentais que culminam com axiomas cuidadosamente formulados para definir estruturas, como um espaço vetorial, por exemplo, em termos de propriedades específicas. (TALL, 2004).

Na realidade desse mundo, segundo Tall (2013), as demonstrações envolvem definições formais e deduções como consequências de propriedades estabelecidas. Apesar de os teoremas

formulados poderem se originar de experiências corporificadas e simbólicas, as provas devem seguir sua dedução unicamente a partir definições formais, sem a utilização implícita de qualquer outra ideia que não pertença ao mundo Formal Axiomático.

É importante destacar que, apesar de apresentarem características individuais, podem existir intersecções entre os mundos, sendo que o estudante pode utilizar características de cada um deles no seu desenvolvimento cognitivo. Lima (2007) afirma que há uma hierarquia entre os Mundos, uma vez que o Mundo Formal normalmente não é discutido antes do Ensino Superior, sendo tratado, portanto, apenas após os mundos Corporificado e Simbólico. Ao compreender o mundo formal, entretanto, e não apenas algumas de suas características, é possível que o indivíduo faça uso de aspectos corporificados, bem como de manipulação simbólica, para encaminhar as suas demonstrações.

Figura 2: Interação entre os Três Mundos da Matemática



Fonte: Tall (2013).

Conforme afirmam Tall e Mejía- Ramos (2004), cada mundo tem uma forma diferente de garantir suas verdades². No Mundo Conceitual Corporificado, a verdade é fundamentada, primeiramente, na intuição humana para depois, em um nível mais sofisticado, se basear em experimentos mentais. Ou seja, algo é verdadeiro, se parece ser ou, de acordo com Tall (2003), se as experiências realizadas acabam ocorrendo da forma como se prevê.

No Mundo Operacional Simbólico, uma fórmula é verdadeira, pois pode ser demonstrada por uma sequência de manipulações algébricas. No contexto do Cálculo, Tall (2003) afirma, por exemplo, que um gráfico tem uma certa taxa de variação instantânea (derivada) ou uma área (integral), pois isso pode ser calculado.

Já, no Mundo Formal Axiomático, um teorema é verdadeiro, se pode ser provado a partir de axiomas e definições. Assim, uma função tem uma derivada ou integral, porque isso pode ser demonstrado.

² warrants of truth

2.1 JÁ-ESTABELECIDOS³, JÁ-ENCONTRADOS⁴ E A-ENCONTRAR⁵

As ideias de já-estabelecidos e já-encontrados são empregadas por Tall (2013) para auxiliarem na compreensão da construção do pensamento matemático. Os já-estabelecidos são estruturas mentais que caracterizam o ser humano, que nascem com todos os indivíduos e levam algum tempo para se desenvolverem, à medida que o cérebro cria conexões na idade tenra. Os já-encontrados, por sua vez, são estruturas mentais resultantes de experiências prévias. Esses dependem em parte da natureza da matemática, o que leva a já-encontrados similares entre indivíduos, e em parte do desenvolvimento cognitivo pessoal, o que leva a diferenças consideráveis de pessoa para pessoa.

Segundo Tall (2013), o pensamento matemático é construído a partir de três já-estabelecidos: reconhecimento, repetição e linguagem.

Reconhecimento de padrões, similaridades e diferenças é uma característica evolutiva compartilhada com outras espécies. É resultado da aplicação de uma combinação de sentidos que todos possuem como olfato, visão, tato, paladar, audição e noção espacial.

Repetição de ações também é um já-estabelecido dividido com outras espécies. É caracterizado pela repetição de uma sequência de ações até que essa possa ser realizada automaticamente, sem a consciência dos detalhes.

A linguagem, por sua vez, é um atributo que distingue o ser humano das outras espécies, pois, segundo Tall (2013), a comunicação através da fala e da escrita, no nível utilizado pela humanidade, é exclusiva. Nesse contexto, Harari (2015) afirma que a característica verdadeiramente única da linguagem humana é a capacidade de transmitir informações sobre coisas que não existem, pois, até onde se sabe, apenas os sapiens podem falar sobre tipos e mais tipos de entidades que nunca viram, tocaram ou cheiraram.

Essa capacidade traz a possibilidade de desenvolver graus cada vez mais sofisticados de pensamento em uma sociedade contemporânea e também através das gerações, por meio da transmissão de ideias e conceitos construídos. Com relação ao desenvolvimento do pensamento matemático, a linguagem, combinada com a capacidade de reconhecimento e repetição, é fundamental, pois possibilita a categorização e comunicação de ideias matemáticas como variável, função, derivada e integral.

Essa combinação de já-estabelecidos leva o ser humano além dos limites de sua própria existência. Praticando uma sequência de operações até que possam ser repetidas automaticamente, é criado o potencial de, por exemplo, contar números atribuídos a conjuntos de objetos. Começando com o número um, pode-se seguir sempre contando o número seguinte, chegando em 2, 3, 4 e assim sucessivamente até que se sinta que, não importa até que número a contagem foi feita, sempre haverá um novo número a seguir. Em algum momento, essa repetição pode levar à conjectura sobre o conceito de infinito, por exemplo.

Se, junto à capacidade de repetição, for adicionada a capacidade de categorizar conceitos através da linguagem, então esses números contáveis, potencialmente infinitos, podem ser categorizados, recebendo um nome ou até mesmo um símbolo, como \mathbb{N} . A partir de então, torna-se mais fácil pensar sobre esse conjunto e, embora a mente humana não possa contar todos os números naturais, ela pode pensar sobre esse conjunto numérico como um todo.

³ *set-before*

⁴ *met-before*

⁵ *met-after*

Segundo Tall (2013), cada indivíduo trilha seu próprio caminho nos Três Mundos da Matemática, considerando que o desenvolvimento cognitivo é individual e fundamentado em experiências anteriores, escolares ou não, que podem ajudar ou atrapalhar na construção de um novo conhecimento. Essas experiências são denominadas pelo autor de já-encontrados. Esse termo é utilizado para descrever como novas situações são interpretadas, a partir de experiências prévias, mas não se refere exclusivamente à experiência em si e sim ao traço deixado por ela e que pode afetar o pensamento. De acordo com Lima (2007), um já-encontrado é definido como “um constructo mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que encontrou anteriormente”. (p. 86).

De acordo com Tall, Lima e Healy (2014), a influência de um já-encontrado é positiva quando esse opera em um novo contexto de tal forma que permite que métodos já vistos sejam utilizados de forma prazerosa na construção de generalizações de técnicas anteriormente estabelecidas. Por outro lado, a influência é considerada negativa quando esse impede a generalização e é causa de confusão. Nesse sentido, um estudante confiante pode sentir-se frustrado por tal obstáculo e, então, utilizar essa frustração como incentivo para trabalhar para encontrar alternativas cognitivas capazes resolver essa questão. De outra forma, um indivíduo que não tenha tal confiança pode sentir-se alienado, sofrendo com uma ansiedade cada vez maior, à medida que interage com novos contextos que trazem, sucessivamente, aspectos problemáticos. Nesse cenário, esse sofrimento pode fazer com que cresça sua vontade de evitar esse desconforto simplesmente aprendendo o que fazer, para, ao menos, ter o prazer de ser aprovado nos testes aos quais for submetido.

De acordo com Tall (2013), os currículos focam-se, entretanto, principalmente em já-encontrados positivos, que são vistos como a base para o desenvolvimento futuro. O autor destaca, no entanto, que é importante perceber que muitos aspectos problemáticos surgem quando os estudantes se deparam com novas situações. Nesse sentido, Pais (2002) afirma que, ao iniciar o contato com um conceito inovador, uma revolução interna pode se iniciar, rompendo laços com o saber estabelecido e levando o sujeito a passar do seu mundo particular a um quadro mais vasto de ideias.

Tall (2013) ressalta que essas mudanças que vão ocorrendo, à medida que a evolução do pensamento matemático se desenvolve, têm consequências relevantes para os estudantes universitários que concluem a graduação em Licenciatura em Matemática, por exemplo, e estão se preparando para ingressar nas Escolas. Nesse sentido, é evidente que apenas saber Matemática avançada não prepara completamente um futuro professor para entender como os seus alunos aprendem.

Estudantes que estão se graduando em Matemática e, portanto, viajaram um caminho matemático extenso, provavelmente têm percepções pessoais sobre a Matemática. Esses, conforme Tall (2013), necessitam de reflexões para permitir que estejam aptos a perceber as verdadeiras necessidades dos alunos com os quais irão se deparar na Escola.

A experiência desses graduandos desenvolve neles novas visões da Matemática, que podem interferir em seus aprendizados anteriores. Essas são definidas por Lima e Tall (2008) pelo termo a-encontrar que, segundo os autores, denota uma experiência encontrada posteriormente que pode afetar a memória de conhecimentos prévios.

3 PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS DO ESTADO DO CONHECIMENTO

De acordo com Morosini (2015), a sistematização e a análise do que foi produzido no campo disciplinar do pesquisador, em especial no seu país, são essenciais para fundamentar o que será produzido numa tese qualificada, uma vez que, segundo Quivy e Campenhoudt (2005), todo trabalho investigativo se inscreve em um *continuum* e pode ser situado em correntes que o antecedem e o influenciam. Nesse sentido, os autores afirmam que é natural que um investigador tome conhecimento de trabalhos precedentes que se concentram em objetos comparáveis, explicando o que aproxima e o que distingue seu trabalho dos anteriores.

Nesse contexto, Lovitts (2007) afirma que os três principais propósitos de uma tese são: demonstração de habilidades de pesquisa pelo estudante, desenvolvimento dessas habilidades e a realização de uma contribuição ao conhecimento de uma determinada área. Para a caracterização de contribuição ao conhecimento da área, surge a importância da realização de um estudo do tipo estado do conhecimento, que, conforme afirma Morosini (2015, p. 102), trata “da identificação, registro e categorização que levam à reflexão sobre a produção científica de uma determinada área, em um determinado espaço de tempo [...]”.

Nesse sentido, Morosini e Nascimento (2017) afirmam que a primeira etapa de construção de uma pesquisa denominada estado do conhecimento é constituída pela seleção do *corpus* de análise, que se caracteriza pela busca de trabalhos científicos que se enquadrem no tema proposto. Essa busca pode ocorrer no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), em repositórios dos bancos de teses e dissertações de Universidades e em periódicos na área de Educação. A busca também pode ser complementada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (IBICT).

Para sistematizar a busca por trabalhos mais relevantes que tratam sobre os conceitos do Cálculo sob a ótica dos Três Mundos da Matemática, inicialmente foi escolhida a base onde os dados foram buscados. A opção recaiu sobre Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Na sequência, conforme sugere Morosini (2015), foram definidos os descritores, ou seja, palavras-chave que designam o tema e que foram utilizadas para nortear as buscas realizadas.

A busca pelos trabalhos aconteceu em setembro de 2018, utilizando como descritores as expressões “Cálculo” e “Três Mundos da Matemática”. Nessa pesquisa foram encontrados oito resultados, sendo três dissertações de mestrado acadêmico, uma dissertação de mestrado profissionalizante e quatro teses de doutorado. A dissertação de mestrado profissionalizante não estava disponível no catálogo da Capes, portanto foi buscada diretamente no repositório da sua instituição acadêmica de origem. Dos oito resultados encontrados, dois não atendiam à busca: o primeiro, pois trata sobre os Três Mundos da Matemática no contexto da equivalência de números racionais, na representação fracionária, conteúdo normalmente trabalhado no Ensino Fundamental; e o segundo, pois se refere a um estado da arte das pesquisas acadêmicas sobre modelagem matemática e foi indicado como resultado da busca por ter seu resumo trocado, ou seja, o resumo cadastrado para esse trabalho é o de uma outra pesquisa, também retornada na busca.

Para complementar a pesquisa por trabalhos, também foi realizada busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Essa retornou apenas três resultados, sendo que todos já haviam sido contemplados anteriormente.

Com o *corpus* de análise constituído, foi realizada a leitura flutuante dos textos selecionados, conforme sugere Morosini (2015). Essa leitura, segundo Morosini e Nascimento

(2017), visa a permitir que os trabalhos sejam organizados em três etapas: bibliografia anotada; bibliografia sistematizada; e bibliografia categorizada.

Inicialmente, foram lidas as páginas iniciais de cada pesquisa selecionada. Esse trabalho permitiu a construção do que as autoras denominam de bibliografia anotada, que consiste no tabelamento das produções escolhidas de acordo com as suas referências bibliográficas completas e os seus respectivos resumos.

A bibliografia sistematizada, que é a relação dos trabalhos selecionados a partir de aspectos considerados relevantes, foi realizada tendo como base uma leitura mais detalhada dos textos. Morosini e Nascimento (2017) citam os itens que consideram que devem ser utilizados para a sistematização, entretanto, salientam que esses podem ser alterados de acordo com o objetivo da pesquisa em andamento. Para efetuar o registro das produções encontradas, foi criada, então, uma ficha na qual foram destacados os seguintes dados: autor, título, data, orientador, objetivos, metodologia, conceitos do cálculo abordados e resultados.

A etapa seguinte é denominada de bibliografia categorizada e constitui-se em uma reorganização da bibliografia sistematizada segundo blocos temáticos de pesquisas com focos convergentes. Essa construção, que exige “compreensão das leituras e impregnação aprofundada na análise” (MOROSINI; NASCIMENTO, 2017) tem como base os conhecimentos prévios do pesquisador, ou seja, diferentes sentidos surgem de acordo com quem estuda o material da pesquisa.

Nesse contexto, os trabalhos analisados foram codificados pelas siglas MA, para dissertações de mestrados acadêmicos, MP, para dissertações de mestrados profissionais, e D, para teses de doutorado, seguidas por números escolhidos de acordo com a ordem em que foram acessados, conforme a tabela a seguir. Esses códigos irão acompanhar e identificar as produções no decorrer da análise.

Quadro 1: Codificação dos trabalhos analisados

Código	Título	Autor
MA1	Uma Proposta de Ensino para o Conceito de Derivada	Douglas Paes Mação
D1	Aprendizagem da Derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento	Jayme do Carmo Macedo Leme
MA2	O Conceito de Limite na Formação Inicial de Professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática	Gabriel de Oliveira Soares
D2	Material para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche	Marcio Vieira de Almeida
MP1	Convergência de Sequências e Séries Numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação de conceitos	Daila Silva Seabra de Moura Fonseca
D3	Aspectos Cognitivos e Conceituais Mobilizados na Resolução de Problemas de Otimização por Estudantes de Engenharia	Rodrigo Rodrigues Dias

Fonte: Os autores (2019).

Todas as pesquisas estudadas se debruçam sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, tendo como fundamentação teórica (em alguns casos em conjunto com outras) a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por Tall (2004; 2013). Entretanto, esse quadro teórico foi utilizado de diferentes formas para abordar diferentes conceitos dessa disciplina em diferentes contextos. Utilizando essa distinção como critério, foram criadas categorias nas quais os trabalhos foram agrupados.

Quadro 2: Categorização dos trabalhos analisados

Categoria	Código	Ano	Curso Foco da Pesquisa
a. Limites	MA2	2018	Licenciatura em Matemática
b. Derivadas	MA1	2014	Engenharias
	D1	2016	Engenharias
	D3	2017	Engenharias
c. Sequências e Séries Numéricas	MP1	2012	Engenharias
d. Continuidade, Diferenciabilidade, Integral, Equação Diferencial e Limite de Sequências Numéricas	D2	2017	Não informado

Fonte: Os autores (2019).

A partir dessa categorização, foi possível estudar os trabalhos que constituem o *corpus* de análise desse estado do conhecimento para buscar responder à seguinte questão: de que forma as pesquisas brasileiras, oriundas de programas de pós-graduação *stricto sensu*, têm utilizado a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, para contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo?

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Inicialmente, percebeu-se que as pesquisas se concentram no ensino e aprendizagem de disciplinas do Cálculo com foco em cursos de engenharia. Nesse sentido, constatou-se que cerca de 67% dos trabalhos selecionados se destinou a esses cursos, enquanto apenas um deles teve como cerne o Curso de Licenciatura em Matemática.

Essa questão reflete diretamente o contexto profissional dos pesquisadores envolvidos nessas investigações, uma vez que os estudos tiveram como objetivo contribuir para a prática docente nos cursos com os quais trabalhavam enquanto construía suas investigações. A única pesquisa que não está claramente vinculada ao ensino e aprendizagem voltado para um curso específico é a de Almeida (2017), pois, segundo o autor, essa foi realizada para aprofundar os conhecimentos construídos durante o seu mestrado, que se iniciou quando ainda não tinha experiência significativa na docência.

A pesquisa que se concentrou no Curso de Licenciatura em Matemática foi realizada por Soares (2018) e teve como cerne a construção do conceito de limite por estudantes de dois cursos de formação de professores de Matemática. O trabalho teve como objetivos: verificar quais características dos Três Mundos da Matemática estão presentes na introdução do conceito de limite em livros didáticos; investigar como ocorre o trabalho de professores de Cálculo de dois cursos de Licenciatura em Matemática, utilizando os livros didáticos citados; analisar como os alunos desses cursos expressam a compreensão do conceito de limite, no contexto dos

Três Mundos da Matemática; e relacionar o quadro teórico com as estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes em questões sobre limites.

Nos resultados da sua investigação, Soares (2018) apontou que a maior parte dos livros didáticos estudados prioriza características dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico na abordagem do conceito de limite. Já os exercícios trazidos nesses materiais, em grande parte, são resolvidos mecanicamente, através de algoritmos algébricos.

Com relação ao trabalho docente, o autor salienta que, nos dois cursos, há uma preocupação de que haja uma articulação entre os conceitos trabalhados no Cálculo e aqueles vistos no Ensino Básico. Para tanto, ocorre uma variação entre utilização dos livros e diferentes materiais, com vistas à construção do conhecimento dos futuros professores.

No que diz respeito à compreensão dos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de limite, Soares (2018) afirma que em apenas uma questão proposta obteve-se resposta de todos. Esse fato ocorreu justamente na situação em que se solicitava apenas o cálculo de um limite, o que pôde ser feito por meio manipulações algébricas elementares. O pesquisador ressalta também que, em nenhum momento, foram evidenciadas características do Mundo Formal Axiomático na interação com os estudantes.

Outra característica importante que diferencia entre si os trabalhos constituintes desse *corpus* de análise é o conceito principal do Cálculo abordado na pesquisa. Nesse contexto, um estudo se concentrou no conceito de limite (SOARES, 2018), três focaram no conceito de derivada (MAÇÃO, 2014; LEME, 2016; DIAS, 2017), um em sequências e séries numéricas (FONSECA, 2012) e um nos conceitos de Continuidade, Diferenciabilidade, Integral, Equação Diferencial e Limite de Sequências Numéricas (ALMEIDA, 2017).

O único trabalho que abordou o conceito de integral, foco da futura tese do primeiro autor, foi o apresentado por Almeida (2017). O pesquisador teve como objetivo elaborar material didático para o ensino de diversos conceitos vinculados ao Cálculo, buscando promover a integração entre teoria e prática. Para tanto, apoiou-se na ideia de Gênese Documental, elaborada por Gueudet e Trouche (2009) e nos constructos teóricos de Tall (1986; 1993; 1994; 2004; 2013) sobre a utilização do computador no ensino e aprendizagem de Matemática, os Organizadores Genéricos e Raízes Cognitivas e os Três Mundos da Matemática.

Na sua tese, Almeida (2017) afirma que é necessário que um material de ensino tenha respaldo em uma estratégia didático-pedagógica e que esse talvez não atinja seus objetivos de maneira autônoma, fazendo-se necessária, portanto, a participação do professor como agente organizador da atividade. De acordo com o autor, essas crenças são corroboradas pelo quadro teórico apresentado, pois a Teoria de Gênese Documental traz indicações de cunho didático, visando à organização do material, e as ideias de Tall, de caráter cognitivista, são utilizadas para nortear o desenvolvimento das atividades.

São elaboradas pelo autor, então, atividades para o ensino e aprendizagem dos conceitos de Continuidade, Diferenciabilidade, Integral, Equação Diferencial e Limite de Sequências Numéricas, considerando três componentes: matemática, didática e material. Para a componente material foram utilizados *applets*⁶ ou ferramentas construídas no *software* GeoGebra.

Após apresentar e detalhar as atividades propostas, nas suas considerações sobre o trabalho realizado, Almeida (2017) ressalta que uma forma de viabilizar a pretendida integração entre teoria e prática é concebida pela aproximação entre professores e pesquisadores. Segundo

⁶ Pequenos softwares que executam atividades específicas no contexto de um software mais abrangente.

o autor, tentou-se realizar essa tarefa por meio da construção de materiais de ensino, baseada em constructos teóricos, e destacando a necessidade da utilização das novas tecnologias, considerando o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Nesse contexto, o trabalho é concluído ratificando a validade de se incorporar conceitos teóricos, de natureza cognitiva, no desenvolvimento de materiais para o ensino de Cálculo. Segundo Almeida (2017), é dessa forma que essas teorias podem ser incorporadas no repertório de recursos de um professor e compor um dos elementos da sua prática docente.

O conceito do Cálculo mais abordado nas pesquisas foi o de derivada, que esteve presente em 50% dos trabalhos analisados. A dissertação de Mação (2014) e a tese de Leme (2016) se concentram em aspectos que podem contribuir para a construção, por parte dos alunos, desse conceito. Já Dias (2017) trata da ideia de derivada no contexto da resolução de problemas de otimização.

Mação (2014), em seu trabalho de cunho teórico, tem por objetivo apresentar abordagens para o conceito de derivada, através da elaboração de atividades menos dependentes do professor, promovendo mais autonomia nos estudantes. Para tanto, escolhe três das sete abordagens propostas por Thurston (1994), a saber: geométrica, taxa e aproximação. A partir dessa teoria e das ideias dos Três Mundos da Matemática, o autor propõe três abordagens iniciais para o conceito de derivada buscando inserir o sujeito na construção do seu conhecimento e proporcionar a sua interação com características formais, simbólicas e corporificadas nesse processo.

Leme (2016), na sua investigação, também teórica, busca identificar e compreender os diferentes fluxos de pensamento envolvidos na aprendizagem do conceito de derivada, tendo por base a teoria dos Três Mundos da Matemática. Segundo o autor, sua finalidade é identificar meios que potencializem a compreensão desse conceito matemático.

Baseando-se nas ideias de Tall (2004; 2013), Leme (2016) propõe nove fluxos de pensamento, que foram exemplificados utilizando o conceito de extremos locais. Segundo o autor, as atividades elaboradas ativam diferentes características referentes à aprendizagem de objetos matemáticos, destacando elementos dos diferentes mundos e os possíveis fluxos de pensamento que podem ocorrer entre eles.

Na sua tese, Dias (2017) trabalha com o conceito de derivada, buscando apontar quais aspectos cognitivos e conceituais são mobilizados por estudantes de engenharia na resolução de problemas de otimização. Nesse sentido, a pesquisa foi dividida em cinco etapas: levantamento bibliográfico; entrevistas; elaboração e implementação de atividades; análise parcial; e análise final. A investigação foi baseada nas teorias dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2009; 2011), do Pensamento Matemático Avançado, de Tall (1991) e Dreyfus (1991), e dos Três Mundos da Matemática, de Tall (2004; 2013). A partir da análise do resultado do seu estudo, Dias (2017) destaca a relevância da construção de atividades que instiguem o espírito investigativo dos estudantes, as vantagens da utilização de recursos computacionais e a importância da utilização de recursos manipulativos, como agentes catalisadores dos processos de visualização, modelagem e generalização.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O levantamento realizado nesse estado do conhecimento mostra que ainda não há uma grande quantidade de pesquisas *stricto sensu* relacionando o Cálculo com a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall. Também pode-se constatar que as investigações existentes são recentes, começando no ano de 2012. Entretanto, dada a visibilidade do aporte teórico, caracterizada principalmente pela publicação do livro *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*, em 2013, a quantidade desse tipo de trabalho vem crescendo nos últimos anos e pode se constituir em uma rica fonte de consulta para práticas pedagógicas de professores e para revisão de literatura para pesquisadores de Programas de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

Um dos principais pontos levantados nessa investigação é a forma como essa teoria vem sendo utilizada pelos pesquisadores. A maior parte dos trabalhos analisados se concentra na elaboração de propostas de ensino para os conceitos de Cálculo, a partir da teoria dos Três Mundos da Matemática, destacando, em alguns casos, a relevância das tecnologias digitais da informação e comunicação para o sucesso dessas abordagens.

Nesse contexto, a construção desse estado do conhecimento, tendo como cerne a utilização da teoria dos Três Mundos da Matemática no desenvolvimento do ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo, possibilitou uma imersão no tema e o surgimento de novas ideias a partir da análise dos trabalhos selecionados para compor o *corpus* de análise. Para tanto, as pesquisas foram estudadas conforme os conteúdos abordados e também de acordo com o curso no qual centraram seus esforços.

Notou-se, então, que há apenas uma pesquisa envolvendo a formação de professores de Matemática e essa aborda exclusivamente o conceito de Limite. Da mesma forma, foi possível observar que há apenas um estudo tratando do conceito de Integral, em uma tese que também estuda os conceitos de Continuidade, Diferenciabilidade, Equação Diferencial e Limite de Sequências Numéricas.

Nesse sentido, a ausência de trabalhos *stricto sensu*, no *corpus* de análise sugerido, abordando o conceito de Integral, no contexto de Cursos de Licenciatura em Matemática, sob a ótica da teoria dos Três Mundos da Matemática, aponta uma direção e um sentido que ainda podem explorados na tese que está sendo construída pelo primeiro autor desse artigo, sob orientação do segundo autor, caracterizando o ineditismo requerido em um trabalho em nível de doutorado.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V. *Material para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche*. 2017. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

ARTIGUE, M. La Enseñanza de los Principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. et. al. *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.

BORGES, T. D. B.; LIMA, V. M. R.; RAMOS, M. G. Argumentação no Ensino de Ciências: estado do conhecimento das produções stricto sensu brasileiras nos últimos dez anos. *Revista Dynamis*. Blumenau, v. 24, n. 1, 2018.

D'AMBROSIO, U. *Transdisciplinaridade*. São Paulo: Palas Athenas, 1997.

DEMO, P. *Educar pela Pesquisa*. 7 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2005.

DIAS, R. R. *Aspectos Cognitivos e Conceituais Mobilizados na Resolução de Problemas de Otimização por Estudantes de Engenharia*. Tese. (Doutorado em Educação matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. In: TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Cambridge: Mathematics Educational Library, 1991, p. 25-41.

DUVAL, R. *Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009

_____. *Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma - Entrar no Modo Matemático de Pensar: os registros de representação semiótica*. São Paulo: PROEM, 2011.

FONSECA, D. S. S. M. *Convergência de Sequências e Séries Numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação de conceitos*. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.

HARARI, Y. N. *Sapiens – uma breve história da humanidade*. 1 ed. Porto Alegre: L&PM, 2015.

LEME, J. C. M. *Aprendizagem da Derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento*. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

LIMA, R. N. *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática*. 2007. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, R. N.; TALL, D. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, v. 67, p. 3-18, 2008.

LOVITTS, B. E. *Making the implicit explicit: creating performance expectations for the dissertation*. Virginia: Stylus, 2007.

MAÇÃO, D. P. *Uma Proposta de Ensino para o Conceito de Derivada*. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática*. 2 ed. São Paulo: Autores Associados, 1991.

MOROSINI, M. Estado do conhecimento e questões de campo científico. *Revista da Educação*. Santa Maria, v. 40, n. 1, jan./abr. 2015.

MOROSINI, M.; NASCIMENTO, L. M do. Internacionalização da Educação Superior no Brasil. *Educação em Revista*. Belo Horizonte, n. 33, 2017.

MÜLLER, T. J.; AMARAL, E. M. H. Uma Concepção Motivacional para o Ensino de Cálculo a Proposta E2D. In: *Segunda Conferência Latinoamericana sobre el Abandono en la Educación Superior*. 2012. Porto Alegre. Anais.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

QUIVY, R.; CAMPENHOUDT, L. V. *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. 4 ed. Lisboa: Gradativa, 2005.

SOARES, G. O. *O Conceito de Limite na Formação Inicial de Professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática*. 2018. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2018.

TALL, D. *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

_____. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Cambridge: Mathematics Educational Library, 1991, p. 3-21

_____. Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In: Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching, 5, 1993. *Proceedings*. Addison-Wesley, p. 243-258, 1993.

_____. Computer Environments for the Learning of Mathematics. In: BIEHLER, R; SCHOLZ, R. W.; WINKLEMANN, B. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 189-199, 1994.

_____. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: *20th University Mathematics Teaching Conference*. 1996. Nottingham. Proceedings.

_____. Thinking through three worlds of mathematics. In: *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 28, 2004, Bergen, Norway, 2004.

_____. *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge, 2013.

TALL, D.; LIMA, R. N.; HEALY, L. Evolving a Three-World Framework for Solving Algebraic Equations in the Light of What Student Has Met Before. *Journal of Mathematics Behavior*, 34, p. 1-13, 2014.

TALL, D.; MEJÍA-RAMOS, J. P. Reflecting on Post-Calculus Reform. In: International Congress of Mathematics Education, 2004, Copenhagen, DK. *Proceedings*. Plenary for Topic Group 12: Calculus. Copenhagen, DK, 2004.

THURSTON, W. P. On the Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin on the American Mathematical Society*, v. 30, n. 2, p. 161-177, 1994.