

MODELAGEM MATEMÁTICA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES PARA OS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

*MATHEMATICAL MODELING IN MATHEMATICAL EDUCATION: POSSIBILITIES FOR
TEACHING AND LEARNING PROCESSES*

Maria Rosana Soares
Doutora em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP
maryrosanasoares@gmail.com

Guataçara dos Santos Junior
Doutorado em Ciências Geodésicas
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
guata@utfpr.edu.br

Jorge Henrique Gualandi
Doutorado em Educação Matemática
Instituto Federal do Espírito Santo, IFES
jhgualandi@gmail.com

Resumo

Na literatura da modelagem matemática¹, há diferentes procedimentos (etapas ou possibilidades de abordagens) para desenvolvê-la e explorá-la no ensino de matemática. Este artigo tem como objetivo apresentar e evidenciar as essenciais possibilidades para os processos de ensino e aprendizagem de matemática, extraídos da literatura e de atividades de modelagem desenvolvidas em um curso de licenciatura em matemática. Metodologicamente, o estudo foi amparado por análises bibliográficas e práticas, pesquisa qualitativa de cunho interpretativo e estudo de caso, utilizando materiais audiovisuais como o *software Calc*, o *Excel*, o *Word* e bibliotecas *on-line*. As coletas de dados derivaram-se da observação, da intervenção na pesquisa e dos dados analisados e extraídos de anotações, atividades feitas pelos sujeitos, consultas ao Ministério da Saúde, imagens, registros e questionários. Portanto, a modelagem apresenta várias possibilidades para os processos de ensino e aprendizagem de matemática e sua realização pode acontecer de modo natural e atendendo às condições da sala de aula e/ou extraclasse, conforme a clientela, o ambiente, a realidade escolar, a preparação docente, os conceitos matemáticos a serem desenvolvidos, os recursos disponíveis e os objetivos a serem atingidos, tendo por foco a aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Possibilidades. Processos de ensino e aprendizagem.

Abstract

In the literature of mathematical modeling, there are different procedures (steps or possibilities of approaches) to develop and explore it in mathematics teaching. This article aims to present and emphasize the essential possibilities to the mathematics teaching and learning processes, extracted from the literature and modeling activities developed in a degree course in mathematics. Methodologically, the study was supported by bibliographical and practical analyzes, qualitative research of an interpretative nature and a case study, using audiovisual materials such as *software, Calc, Excel, Word*, and online libraries. The data collections were derived from observation, intervention in the research and data analyzed and extracted from annotations, activities done by the subjects, consultations with the Ministry of Health, images, records, and questionnaires. Therefore, modeling presents several possibilities for the mathematics teaching and learning processes and its realization can take place in a natural way, meeting the conditions of the classroom and/or the extracurricular conditions, according to the clientele, environment, school reality, teacher preparation, mathematical concepts to be developed, resources available and goals to be achieved, focusing on learning.

Keywords: Mathematical Education. Mathematical Modeling. Possibilities. Teaching and learning processes.

¹Para evitar repetições textuais, serão utilizados indistintamente os termos *modelagem matemática* e *modelagem*.

1 INTRODUÇÃO

“A matemática como uma área do conhecimento humano tem fornecido meios e ferramentas para a construção e/ou aperfeiçoamento de diversas áreas do conhecimento. No ensino ela é uma fonte do desenvolvimento de capacidades, criatividade, criticidades” (SOARES, 2017b, p. 39), bem como de “habilidades aos estudantes para fins de formulação, exploração e resolução dos problemas reais e/ou matemáticos, ações que desenvolvem competências como organização de dados e realização de sínteses, análises e previsões” (SOARES, 2017b, p. 39). Nesse sentido, ela é “vista por muitos, estudantes e professores, como um conhecimento imutável, inflexível e inalterável, sentimentos que, aliados às abordagens a ela destinadas em seu ensino, sempre ocasionaram fracassos, desmotivações e preocupações aos responsáveis pela educação” (SOARES, 2017b, p. 39). A Matemática se encontra presente na vida das pessoas independentemente de sua classe social, sendo o conhecimento matemático importante para a compreensão do mundo, exigindo interação, interpretação e raciocínio para sua compreensão.

É fato que “embora já se identificasse desde a Antiguidade preocupações com o ensino da matemática, particularmente na República VII de Platão, é na Idade Média e [no] Renascimento nos primeiros tempos da Idade Moderna que essas preocupações são melhor focalizadas” (D’AMBROSIO, 2013, p. 13). Esses fracassos e desinteresses podem estar relacionados a um processo de ensino limitado à memorização e ao uso de técnicas, sistematizações, regras, definições e propriedades, sem a relação adequada com problemas gerados a partir da realidade ou, ainda, por seus componentes básicos não serem conjugados, como aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (FISCHBEIN, 1994). Frente a essa problematização, surgiu uma área chamada de *Educação Matemática*, que de acordo com Steiner (1993, p. 19, grifos do autor), “é um campo cujos domínios de referência e ação são caracterizados por uma extrema complexidade: o complexo fenômeno ‘Matemática’, no seu desenvolvimento histórico e atual, e na sua inter-relação com outras ciências, áreas de prática, tecnologia e cultura”; assim como “a complexa estrutura do ensino e escolarização na nossa sociedade; as condições e fatores altamente diferenciados no desenvolvimento individual, cognitivo e social do estudante, etc.” (STEINER, 1993, p. 19). A educação matemática é um campo de investigação profissional e científico que se desenvolve, se consolida e se firma gradualmente ou constantemente conforme a realidade em que se insere, cujo interesse é pesquisar, estudar e evidenciar os fenômenos e os problemas relacionados aos processos de ensino para a aprendizagem de matemática.

Para tanto, a educação matemática trata das seguintes tendências pedagógicas para o ensino de matemática: didática da matemática, etnomatemática, história da matemática, investigação matemática, jogos matemáticos, modelagem matemática, novas tecnologias, projetos, resolução de problemas (LOPES; BORBA, 1994; GROENWALD; SILVA; MORA, 2004; ZORZAN, 2007; PAIS, 2011). Em se tratando, especificamente, da modelagem matemática, pode-se dizer que “O termo ‘Modelagem’ retrata outro tipo de ação, que parte da realidade para a Matemática. É como se estivéssemos perguntando: Onde posso encontrar alguma Matemática para nos ajudar a enfrentar este problema?” (BELTRÃO; IGLIORI, 2010, p. 19). “Ou seja, a Modelagem possibilita compreender ou resolver problemas de algum segmento do mundo real. Nesse caso, a resolução de um problema envolve coleta de dados reais que fornecem informações sobre a situação de interesse” (BELTRÃO; IGLIORI, 2010, p. 19). A expressão *modelagem* pode ser tratada como sinônimo de modelação, objetivando investigar,

desenvolver e transformar uma situação ou um problema da realidade a partir de pesquisas e de estudos, com análises, previsões, simulações, modificações e explicações que favorecem o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Na literatura, pode-se dizer que há inúmeros trabalhos acadêmicos sobre modelagem que mostram que sua utilização em sala de aula pode proporcionar dificuldades, resistências e/ou contribuições aos profissionais, aos estudantes e/ou à instituição de ensino (BARBOSA, 2001; BELTRÃO, 2009; BASSANEZI, 2009; SOARES, 2012a, 2012b) ou que revelam sua maturidade e consolidação no meio científico por meio de pesquisas bibliográficas e/ou teóricas (KLÜBER, 2012; SILVEIRA, 2014; SOARES, 2017a, 2017b), uma vez que: “a Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar-se um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável” (BASSANEZI, 2009, p. 177). A modelagem eficiente exige, cobra, pede, transforma e favorece a aprendizagem dos sujeitos ao investigar, analisar e aclarar uma porção da realidade não matemática para averiguá-la e transferi-la, fundamentalmente, para a linguagem matemática conforme os entendimentos, enfoques e orientações dos modeladores. Para tanto, os estudos, as pesquisas e as ações pedagógicas de docentes e de pesquisadores vêm contribuindo, essencialmente, para implementar, divulgar e fortalecer o uso da modelagem em sala de aula no cenário brasileiro para os processos de ensino e aprendizagem de matemática.

Nessa perspectiva, neste artigo será dada especial atenção para a seguinte questão: “Como podem ser apresentadas e evidenciadas as essenciais possibilidades para os processos de ensino e aprendizagem de matemática, extraídos da literatura e de atividades de modelagem desenvolvidas em um curso de licenciatura em matemática?”, uma vez que a “Modelagem é um processo muito rico de encarar situações reais, e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial” (D’AMBROSIO, 1986, p. 11).

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Este artigo trata das essenciais possibilidades para os processos de ensino e aprendizagem de matemática, resultantes de parte de uma pesquisa que objetivou “Investigar as contribuições que a Modelagem Matemática pode propiciar como estratégia de ensino e aprendizagem para os futuros professores de Matemática” (SOARES, 2012b, p. 27).

Para tanto, foram efetuadas diversas atividades teóricas e práticas sobre e por meio da modelagem com 30 licenciandos de matemática (L) regularmente matriculados. Todavia, devido às desistências e/ou faltas temporárias de alguns, sucedeu uma participação efetiva mínima de 23 e máxima de 25 L. Os universitários se organizaram e se subdividiram em cinco grupos, autonomamente: G1 (5 L); G2 (5 L); G3 (7 L); G4 (6 L); e G5 (7 L). Eles foram identificados por: AG1; AG2; AG3; AG4; AG5. Nisso, G1, por exemplo, significa “primeiro grupo” e AG1, “licenciandos do primeiro grupo”.

Para fins de esclarecimentos, segue uma síntese referente à organização de uma proposta de modelagem desenvolvida em um 4º ano de licenciatura em matemática:

Quadro 1 – Procedimentos utilizados na Proposta de Modelagem Matemática

Estratégias de investigação utilizadas	De acordo com Lincoln e Guba (1985), Miles e Huberman (1994), André (1998), Bogdan e Biklen (1994), Denzin e Lincoln (2006) e Lüdke e André (2012): qualitativa, bibliográfica, aplicada e interpretativa, que trata de um estudo de caso e investiga o <i>como</i> do processo.
Por que a pesquisa qualitativa é aplicada?	- Permite apresentar a matemática presente no cotidiano relacionando a teoria à prática; - Investigar as situações-problemas da realidade; - Compreender a natureza e a origem dos problemas e suas soluções.
Por que a pesquisa qualitativa é interpretativa?	- Prioriza o ambiente natural de aprendizagem, os processos de ensino e/para aprendizagem; - Visa interpretar e entender as experiências, conhecimentos, concepções, indagações e compreensões dos sujeitos, além dos dados obtidos na aplicação da modelagem.
Procedimentos da pesquisa	Observação, intervenção na pesquisa, questionário pré-teste e pós-teste, dados retirados da pesquisa, como anotações e registros de participação dos sujeitos, e dados extraídos do Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a, 2011b, 2011c), em que se elaboraram, realizaram e evidenciaram os processos dinâmicos para os desenvolvimentos de atividades de modelagem matemática.
Sujeitos da pesquisa	Universitários de um 4º ano de Licenciatura em Matemática (2011).
Onde foi aplicada?	Universidade Estadual do Norte do Paraná, campus Jacarezinho (UENP-CJ).
Disciplina	Introdução à Modelagem Matemática.
Quando foi desenvolvida?	De 31 de maio de 2011 a 8 de novembro de 2011, na universidade citada acima.
Duração	Para o desenvolvimento da pesquisa foi necessário fazer uso dessas duas relações: - Aulas regulares – 30 horas-aula total; utilizando, em média, 2 horas-aula semanalmente (cerca de 100 minutos); - Atividades extraclasse e orientação por <i>e-mail</i> – 6 horas-aula total (Desenvolvimento da modelagem matemática em ambientes extraclasse – DMME).

Fonte: Soares (2012b, p. 100).

Em relação aos procedimentos de coleta de dados, estes foram investigados e organizados pela pesquisadora e abordados juntamente com os sujeitos agrupados para o desenvolvimento das atividades propostas de *Modelagem*, em virtude de suas inexperiências e conhecimentos mínimos no assunto, bem como visando motivá-los e encorajá-los à identificação, compreensão e aplicação dessa temática. Assim, as atividades práticas envolvendo essa estratégia de ensino fizeram uso de dados e informações de fontes como Ministério da Saúde e dois jornais da biblioteca *on-line*, *GI-Globo* e *Uol*, de acordo com as referências apresentadas neste artigo.

No Quadro 2, há oito fases referentes às atividades desenvolvidas de modelagem. Ao longo dessas fases, os AG receberam materiais impressos visando proporcionar envolvimento e discussões sobre e por meio da modelagem. Também fizeram uso de materiais audiovisuais, como *software*, *Calc*, *Excel* e *Word*. Para atingir os objetivos propostos, essas fases se direcionaram buscando orientá-los e capacitá-los a refletirem sobre a relevância da modelagem para o ensino e para a aprendizagem da matemática com o foco nas contribuições para sua formação e atuação profissional. Assim considerado e perante a quantidade de fases concretizadas e da limitação de discussão neste artigo, convencionou-se apresentar os principais resultados e discussões de parte da última fase aplicada, uma vez que as demais serão discutidas em outro trabalho.

Para fins de esclarecimentos, segue uma síntese referente à proposta desenvolvida em uma atividade de modelagem realizada em um 4º ano de licenciatura em matemática:

Quadro 2 – Atividades desenvolvidas de Modelagem²: fases, objetivos e sujeitos

Fases	Objetivos e sujeitos
Primeira Fase: <i>Questionário pré-teste</i>	• Objetivou analisar e reconhecer as experiências, conhecimentos e concepções prévias dos futuros professores sobre a modelagem (24 futuros professores – L).
Atividades de Modelagem Matemática – MM: 2ª à 6ª fase	• Da 2ª à 6ª fase objetivou-se orientar e capacitar os futuros professores de Matemática a:
Segunda Fase: <i>MM – algumas raízes no Brasil</i>	• Refletirem sobre o início da modelagem no Brasil (23 L);
Terceira Fase: <i>Modelo Matemático e sua essência no processo da MM</i>	• Refletirem sobre modelo, modelo matemático e algumas contribuições demonstradas por meio dos processos da modelagem (24 L);
Quarta Fase: <i>MM – algumas concepções</i>	• Refletirem sobre em que consiste a modelagem na concepção de alguns pesquisadores (22 FP);
Quinta Fase: <i>MM – algumas possibilidades no ensino</i>	• Refletirem sobre como desenvolver a modelagem no ensino (23 L);
Sexta Fase: <i>MM – à luz de seus trabalhos</i>	• Refletirem sobre alguns trabalhos desenvolvidos de modelagem (25 L).
Sétima Fase: <i>Aplicação das “Atividades de MM – utilizando o tema: dengue”</i>	Esta fase objetivou: • Orientar e capacitar os futuros professores a refletirem sobre questões ambientais, em especial sobre a dengue; • Desenvolver atividades de modelagem como estratégia de ensino e/para aprendizagem e proporcionar sua compreensão (23 L, em média).
Última Fase: <i>Questionário pós-teste</i>	• Objetivou analisar e reconhecer as experiências, conhecimentos e concepções obtidos pelos licenciandos sobre e a partir da modelagem (22 L).

Fonte: Soares (2012b, p. 101).

Na sequência, serão evidenciadas as possibilidades para os processos de ensino e aprendizagem de modelagem em educação matemática.

3 POSSIBILIDADES PARA OS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Na concepção de Bassanezi (2009, p. 24, grifos do autor), “*Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências*”. Para tanto, a “modelagem não deve ser utilizada como uma panaceia descritiva adaptada a qualquer situação da realidade – como aconteceu na teoria dos conjuntos” (BASSANEZI, 2009, p. 25), uma vez que ela “pode estar integrada a um programa predefinido ou pode se constituir numa atividade extra; e assim por diante” (BARBOSA, 1999, p. 5), e seu uso “[...] contribui na motivação para aprender Matemática” (REHFELDT et al., 2018, p. 91). A modelagem matemática é uma estratégia de ensino e aprendizagem que proporciona investigar, problematizar e transformar as situações da realidade em expressão matemática, ou seja, em modelo matemático, explorando e desenvolvendo atividades, tarefas ou trabalhos de naturezas reais e/ou matemáticos.

² Os referenciais teóricos utilizados em cada fase estão em Soares (2012b, p. 101).

Nesse sentido, Chevallard (2001, p. 50) explica que como esse processo faz parte da essência da atividade matemática:

Um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que se quer estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho, para responder as questões inicialmente apresentadas. Grande parte da atividade matemática pode ser identificada, portanto, como uma atividade de modelagem matemática.

Uma atividade de modelagem matemática proporciona pesquisar, analisar e explorar dados e/ou problemas da realidade, pois realiza sua formulação e sua resolução em linguagem matemática, possibilitando aos estudantes a atribuição de sentidos e a construção de significados. O modelo matemático é resultante da exploração, da organização e da transformação de problematizações dos dados ou dos fenômenos (reais e/ou matemáticos) e, por meio dele, são buscadas a resolução, a representação, a solução e a explicitação de matematizações dos problemas formulados a partir da realidade, visando o ensino e a aprendizagem. Esse modelo pode ser expresso por meio de um conjunto de símbolos, estruturas e relações matemáticas tais como: gráficos, tabelas, funções, expressões matemáticas, sistemas, equações, figuras geométricas, diagramas e representações estatísticas, entre outros conceitos matemáticos e/ou estatísticos. Assim, ele é desenvolvido na própria Matemática por excelência, bem como em outras áreas e/ou disciplinas independentes que fazem uso da matemática e de modelos matemáticos, tais como: administração, agronomia, ciências, engenharias, estatística, física, geografia, meteorologia, medicina e tecnologias.

Assim sendo, na Concepção de Barbosa (2001, 2004), as atividades de modelagem são organizadas de acordo com as possibilidades do contexto escolar, a experiência do professor, o interesse dos alunos e outros fatores. Assim, cada configuração é denominada de *caso*, sendo que os casos são classificados em três formas distintas:

Quadro 3 – Tarefas no processo de modelagem matemática

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do Problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Coleta de Dados	professor	professor/aluno	professor/aluno
Solução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: Barbosa (2004, p. 77).

As tarefas nos processos de modelagem são classificadas segundo os seguintes casos:

- **Caso 1:** Barbosa (2004, p. 76) explica este caso do seguinte modo:

O professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. Aqui, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados e a atividade não é muito extensa. Citarei um exemplo extraído de minha própria sala de aula no qual solicitei aos alunos para investigar sobre os planos de pagamento disponíveis no mercado para ter o acesso à internet. Coletei os preços de uma companhia que oferece o serviço de internet. [...]. Esta investigação toma pouco tempo, cerca de três aulas, incluindo a discussão dos resultados.

Nesse caso, o docente expõe a descrição de um problema com as informações necessárias para o desenvolvimento da resolução e solicita aos alunos a investigação desse

processo. Desse modo, todo o trabalho se inicia a partir de um problema real oferecido pelo professor.

- **Caso 2:** Barbosa (2004, p. 76) explica que “os alunos se deparam apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial”. No caso 2, os estudantes são responsabilizados pela condução das tarefas. Barbosa (2004, p. 76), exemplifica uma atividade realizada com base no referido caso:

Por exemplo, em outra turma, apresentei a seguinte questão: “Quanto custa ter acesso à internet?” Discuti com os estudantes os problemas, porém não dei nenhuma tabela de preços e os vários grupos ficaram responsáveis para a coleta daqueles que julgavam necessários para resolver o problema. Eles tiveram que selecionar as variáveis importantes e traçar estratégias de resolução. Essa atividade demandou mais tempo que a anterior, consumindo algumas semanas. Durante esse tempo, os alunos trabalharam fora da sala de aula e discutiram comigo em sala o desenvolvimento da tarefa. O projeto foi concluído com uma apresentação oral por todos os grupos, e subsequente discussão. Nesse caso, o professor teve menos controle sobre as atividades dos alunos e esses tiveram uma maior oportunidade de experimentar todas as fases do processo de Modelagem.

O professor traz para o ambiente de aprendizagem um problema para ser investigado e é necessário buscar dados externamente. Assim, cabe aos alunos realizarem a coleta de dados necessários, fazerem a resolução e obterem uma solução. Assim eles se tornam organizadores dos processos de modelagem.

- **Caso 3:** Barbosa (2004, p. 77) explica o caso 3: “trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos”. Esse autor esclarece o caso 3 por meio da atividade desenvolvida como professor de matemática no curso de administração de empresas:

Os alunos foram convidados a escolherem temas de interesse. Telecomunicações, fome, inflação, marketing e a taxa de contribuição social foram citados pelos 5 grupos de estudantes. Focarei minha discussão sobre o grupo que escolheu o último tema: a taxa de contribuição social. Os estudantes iniciaram levantando questões sobre os tópicos. No início, eles não possuíam uma ideia clara sobre como proceder. À medida que se tornavam mais familiares com o tema e as variáveis, e após discussões com os professores, eles escolheram uma questão singular para perseguir: Qual é o impacto da contribuição social sobre os salários? Daí, eles tiveram que coletar e organizar dados antes que pudessem resolver o problema. Nesse caso, a atividade de Modelagem tomou considerável tempo em relação aos casos anteriores, em particular pela dificuldade inicial dos alunos em formular os problemas. Como no caso prévio, o professor acompanhou o trabalho dos alunos nas salas, mas tiveram que desenvolver a maior parte em tempo extra.

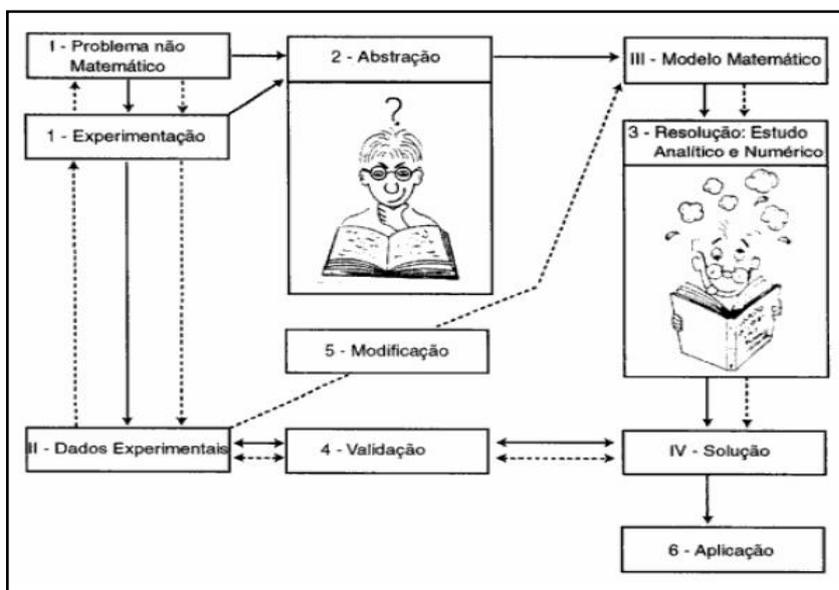
No caso 3, os alunos formulam e resolvem os problemas por meio de temas não matemáticos, isto é, por meio de temas de desenvolvimento de projetos de outras áreas do conhecimento. Assim, eles são responsáveis por formular problemas, coletar dados e simplificar situações-problema. Nesse sentido, a escolha do tema pode ser definida tanto por parte do professor como dos alunos, pois é essencial a mediação do professor nos processos das atividades de modelagem.

Assim sendo, os três casos são importantes ao contexto escolar em diversos níveis de ensino, uma vez que o caso 1 apresenta períodos menores para sua realização, enquanto, os dois últimos casos requerem longos prazos. Já os casos 2 e 3 demandam mais disponibilidade e

envolvimento do professor e dos estudantes para o desenvolvimento das atividades de modelagem.

Nessa perspectiva, para Bassanezi (2009), os processos de desenvolvimento de uma atividade de modelagem correspondem a várias etapas, como mostra a seguinte Figura:

Figura 1 – Esquema de uma modelagem matemática



Fonte: Bassanezi (2009, p. 27).

Nesse esquema da atividade de modelagem, as setas contínuas indicam a primeira aproximação, já as pontilhadas indicam a busca de um modelo matemático adequado ao problema estudado, o que torna os processos da modelagem dinâmicos (BASSANEZI, 2009, p. 27). Desse modo, Bassanezi (2009, p. 26-31) explica que uma atividade de modelagem pode ser desenvolvida por meio das seguintes etapas:

1. Experimentação: É uma atividade essencialmente laboratorial, em que se processa a obtenção dos dados. Os métodos experimentais são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Nela, a contribuição de um matemático pode ser essencial para direcionar a pesquisa no sentido de facilitar o cálculo nos modelos.

2. Abstração: É o procedimento que precisa levar à formulação dos modelos matemáticos, que procura estabelecer quatro ações: *Seleção das Variáveis* – o pesquisador precisa distinguir quais são as grandezas essenciais para o modelo e os parâmetros que influenciam sua formulação; *Problematização* – permite a formulação do problema, que precisa ser explicitado de forma clara, compreensível e operacional; *Formulação de Hipóteses* – as hipóteses dirigem a investigação e são formulações gerais que permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas; e por fim a *Simplificação* – busca eliminar do modelo as variáveis que forem identificadas de menos importância para o pesquisador.

3. Resolução: Com as hipóteses formuladas, a resolução de um modelo está vinculada ao grau de complexidade empregado em sua formulação. Várias vezes, só pode ser viabilizada por meio de métodos computacionais que dão solução numérica aproximada e quando esse recurso oferece pistas e sugestões para posteriores soluções analíticas.

4. *Validação*: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto, seja em virtude dos resultados oferecidos quando comparados com os dados obtidos, ou em relação à concordância dos resultados obtidos com características específicas do fenômeno em questão. Um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram. O problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, incluindo seus objetivos e recursos disponíveis.

5. *Modificação*: Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Assim, por várias razões um modelo pode ser modificado quando alguma hipótese estiver falsa; os dados experimentais ou informações se encontrarem incorretos ou obtidos de um modo errôneo; houver erro no desenvolvimento matemático; houver outra teoria matemática que pode resultar em um modelo melhor.

6. *Aplicação*: A modelagem, que se tem mostrado eficiente, permite fazer previsões, tomar decisões, explicar, entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

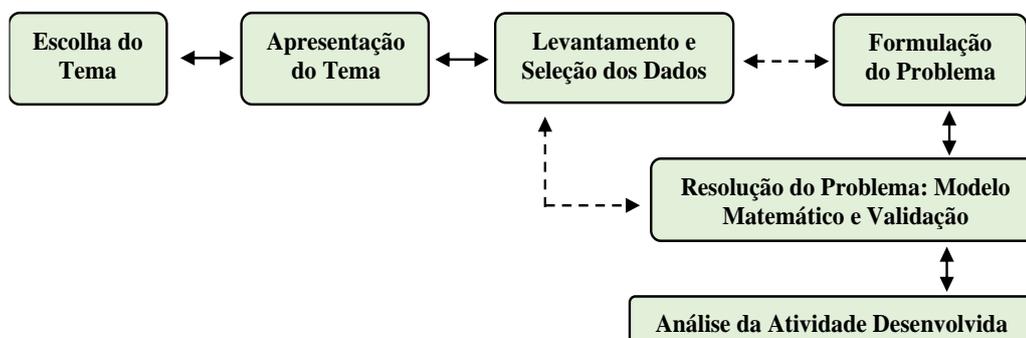
Nesse procedimento não é necessário realizar todas as etapas de modelagem, entretanto, é importante analisá-las e entendê-las para que seu desenvolvimento se torne apropriado e eficiente, com boa aproximação da realidade e com assimilação dos conceitos matemáticos envolvidos diante do modelo matemático estudado.

Nessa perspectiva, Soares (2012a, 2012b) orienta e indica uma dinâmica para desenvolver os processos de modelagem matemática, a qual foi aprimorada neste artigo e encaminhada de acordo com os referenciais: Bassanezi (2009) e Barbosa (1999, 2001, 2003). Esses tiveram relevância devido às experiências profissionais vivenciadas em sala de aula, às práticas já desenvolvidas de modelagem, às proximidades e confiabilidades nos estudos e pesquisas já feitas por esses autores e às leituras aprofundadas em textos e/ou trabalhos publicados por esses referenciais – por exemplo, em conferências, simpósios, encontros, livros, revistas, orientações, dissertações e/ou teses.

3.2 UMA ATIVIDADE SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Soares (2012a, 2012b) afirma que os processos dinâmicos da modelagem podem ser desenvolvidos com base na Figura 2:

Figura 2 – Dinâmica para desenvolver os processos de modelagem matemática



Fonte: Soares (2012a, p. 43; 2012b, p. 160; 2017b, p. 88).

As setas de duas direções, contínuas ou não, expressam que cada etapa de modelagem expõe uma vinculação com as demais etapas. Quanto às setas de duas direções, não contínuas horizontalmente ou verticalmente, significam que há duas possibilidades nos processos de modelagem. A primeira é que se pode realizar o levantamento e a seleção dos dados e, depois, a formulação do problema, enquanto a outra é realizar o processo inverso, isto é, pode-se formular o problema e posteriormente efetuar o levantamento e a seleção dos dados. As 3ª e 4ª etapas da atividade de modelagem são flexíveis e modificáveis, cabendo assim aos docentes, pesquisadores, estudantes e/ou universitários analisar o processo apropriado para alcançar o objetivo proposto e desenvolver os conceitos matemáticos.

Nessa condução, as duas setas pontilhadas unidas denotam que, caso a resolução do problema não seja considerada plausível diante dos processos da modelagem, ou seja, se não for vista como aceitável ou eficiente para resolver o problema formulado, pode-se retomar o processo a partir da 3ª etapa escolhida inicialmente. Isso conforme já foi concretizado, de acordo com o levantamento e a seleção dos dados ou a formulação do problema, com o propósito de realizar as simplificações e/ou modificações admissíveis. Também, segundo os objetivos constituídos e as realidades escolares e/ou universitárias, uma determinada atividade de modelagem pode ser efetivada de acordo com todas as etapas de sua dinâmica ou não – por exemplo, a referida atividade pode ser iniciada a partir do levantamento e da seleção dos dados ou da formulação do problema, visando o ensino para aprendizagem matemática.

Para isso, Soares (2012a, p. 42-110; 2012b, p. 161-213; 2017a, p. 88-94) orienta que as atividades de modelagem podem ser realizadas de acordo com estas etapas:

- **1ª Etapa – Escolha do Tema:** é o que se pretende pesquisar e investigar. O tema a ser definido busca analisar uma situação da realidade e, nesse processo, formula-se o problema posteriormente. O tema escolhido envolve alguma área de estudo como saúde, meio ambiente, esporte, agricultura, agropecuária, engenharia, fenômenos, economia, política, comércio, indústria, educação, ensino, ciência, tecnologia, sociedade e universo, entre outras. Assim, inicialmente, ele não apresentará conexão direta com a Matemática e é importante que o professor e/ou os estudantes agrupados escolham um tema que desperte interesse e motivação em relação ao qual seja fácil e/ou prático de obter informações e dados, bem como para fazer a formulação, investigação, análise e resolução dos problemas.

Nessa modelagem realizada foram exploradas as abordagens pedagógicas 1 e 3, que serão relatadas neste artigo após a explicitação destas etapas.

“O início de uma modelagem se faz com a *escolha de temas*. Faz-se um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções” (BASSANEZI, 2009, p. 45, grifos do autor). Apesar disso, Bassanezi (2009, p. 46) explica que “é muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos, [pois] desta forma, se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva”, uma vez que isso vai ao encontro do caso 3 de Barbosa (2001, p. 54).

Assim sendo, os licenciandos agrupados selecionaram e apresentaram os seguintes temas de interesse: *G1: dengue; G2: saúde; G3: a problemática dos fumantes; G4: culinária; G5: área do esporte e G6: futebol*. Eles tiveram motivação comum para o tema “dengue”, pois reconheceram sua importância para desenvolverem a atividade de modelagem, já que é um assunto polêmico, atual sobre doenças nos seres humanos e seu responsável é o mosquito *Aedes aegypti*, que pode estar presente em todas as regiões do país, principalmente nas regiões tropicais e subtropicais.

Para isso, Barbosa (2001, p. 55) ressalta que “O professor, ao propor as atividades, deve empenhar-se em captar fatos que podem levar os alunos a aceitar o convite para a tarefa. Isso exige a observação da vida deles, de sua linguagem, de suas conversas e de seus propósitos”. Dessa forma, os participantes do G1 fizeram a seguinte manifestação: **“Veja pessoal! Nosso tema é atual e mais interessante de todos!”**, levando a presente pesquisadora a indagá-los o seguinte: **“Qual é a importância desse tema para vocês?”**. Uma resposta mencionada pelos sujeitos do G1 foi que: **“Esse tema é muito importante para todas as pessoas!”**. Seguidamente, com a finalidade de investigar a relevância desse tema na opinião dos futuros professores, a pesquisadora perguntou a eles: **“É importante discutir esse tema para desenvolver uma atividade de Modelagem?”**. A resposta dada por inúmeros deles foi que sim, pois afetava a saúde das pessoas. Essas respostas apresentadas anteriormente estão de acordo com a concepção de Barbosa (2001, p. 55), quando diz que “já no caso 3, os alunos são convidados a manifestar, declaradamente, seus interesses”.

• **2ª Etapa – Apresentação do Tema:** é pesquisar, sintetizar e explicitar a importância do tema escolhido. Essa apresentação visa discutir e enfatizar a relevância do tema selecionado, em que se leva os estudantes ao envolvimento e à valorização, pois, quanto mais interesses e interações ao tema, maiores as possibilidades de se obter um resultado aceitável da prática. Para isso, é necessário pesquisar e investigar textos e trabalhos da área escolhida, por meio de pesquisas bibliográficas em bibliotecas físicas e/ou on-line, em livros, revistas e jornais, via pesquisas de campo e/ou entrevistas e outros meios. Isso pode ser organizado pelo professor ou pelos estudantes agrupados e ser conciso ou abrangente, dependendo da natureza do tema e da disponibilidade que se tem.

Essa etapa foi preparada pela pesquisadora, recorrendo às consultas no Ministério da Saúde (BRASIL 2011a, 2011b, 2011c), e, por conseguinte, orientando os licenciandos para refletirem e discutirem sobre a importância do tema “dengue”. Isso permitiu explicitar o seguinte a respeito do vírus do Aedes: áreas propícias para seu desenvolvimento, características físicas do mosquito e de sua picada, reprodução, modo de vida, ciclo e modo de transmissão, sintomas e tratamentos. Dessa forma, a pesquisadora fez algumas indagações aos licenciandos sobre o tema “dengue”: **O que pode ser o principal responsável pela doença gerada pela dengue? Qual é o vírus causador dessa doença? Que áreas são mais propícias para o desenvolvimento do mosquito?**

Uma resposta dada por um sujeito do G3 foi: **“É o mosquito Aedes aegypti causador da doença”**. Outro sujeito desse grupo também manifestou sua opinião ao relatar que **“Esses mosquitos vivem nas regiões mais quentes e tropicais”**.

• **3ª Etapa – Levantamento e Seleção dos Dados:** é o que se pretende pesquisar, investigar e desenvolver. Conforme os objetivos propostos, conceitos matemáticos a serem desenvolvidos e recursos disponíveis, pode-se fazer o levantamento e a seleção dos dados e, posteriormente, a formulação do problema, ou vice-versa (podem-se inverter as 3ª e 4ª etapas). Para isso, pesquisa-se fazendo um levantamento dos dados, os quais são adequados às análises qualitativas e quantitativas sobre o tema escolhido. Seguidamente, analisam-se e exploram-se os dados obtidos por meio da seleção, isto é, da simplificação dos dados mais importantes e eliminação dos menos relevantes (variáveis), com a identificação das possíveis investigações para os problemas a serem resolvidos (hipóteses) e a organização, síntese e/ou categorização dos dados, por exemplo, em tabulação, se for necessário. Isso pode ser feito pelo professor e/ou estudantes agrupados, sendo assim fundamental analisar o envolvimento e a

motivação dos sujeitos para desenvolver esse processo, além da preparação docente para essa orientação.

“Uma vez escolhido o tema, o próximo passo é buscar informações relacionadas com o assunto. A coleta de dados qualitativos ou numéricos pode ser efetuada de várias formas” (BASSANEZI, 2009, p. 46), sendo, por exemplo, “Através de pesquisas bibliográficas, utilizando dados já obtidos e catalogados em livros e revistas especializadas” (BASSANEZI, 2009, p. 46). De início, os sujeitos não tinham trabalhado com atividades de modelagem, por isso a maioria deles apresentou resistências para trabalhar com ela e a consideravam difícil, ou seja, complexa em relação à compreensão e à aplicação. Isso pode ser observado em uma das falas dos licenciandos do G5: **“Até o momento, nós não desenvolvemos nenhuma atividade de Modelagem Matemática, assim temos dificuldades em pesquisar, fazer análises, levantar dados e selecioná-los, pois, fazer Modelagem é difícil, não é simples”**; em seguida, os sujeitos do grupo G2 argumentaram: **“Nós também concordamos professora!”**. Com efeito, eles demonstraram falta de conhecimento no assunto de modelagem matemática.

Com a finalidade de motivá-los e encorajá-los a realizá-la e entendê-la, a pesquisadora organizou e apresentou o levantamento e a seleção dos casos notificados, casos graves e óbitos por dengue, que foram distribuídos em três tabelas. Isso foi feito de acordo com as informações do Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a) e, devido à quantidade de dados organizados, segue-se somente uma das tabelas.

A Secretaria de Vigilância em Saúde do Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a) registrou o total de casos notificados de dengue no país durante a semana epidemiológica, da 1ª a 26ª semana de 2011, isto é, fazendo um balanço da dengue entre 2 de janeiro de 2011 e 2 de junho de 2011 (6 meses). Isso está de acordo com as regiões do país como mostra a tabela:

Tabela 1 – Casos Notificados de Dengue por Região

Semana Epidemiológica	Norte	Nordeste	Sudeste	Sul	Centro-Oeste
1. Janeiro	23.968	13.426	19.453	5.588	9.595
2. Fevereiro	34.704	24.421	43.558	13.562	10.563
3. Março	32.859	48.181	87.991	21.884	13.056
4. Abril	10.218	39.410	106.255	11.243	10.202
5. Maio	6.186	24.988	71.457	4.525	6.846
6. Junho	2.776	6.871	9.593	128	2.159
Total	110.711	157.297	338.307	56.930	52.421

Fonte: Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a).

Na sequência, foi necessário fazer a formulação do problema.

• **4ª Etapa – Formulação do Problema:** é o que se pretende pesquisar, investigar e resolver. Com o levantamento e a seleção dos dados sobre o tema escolhido se definem os problemas para fazer sua resolução, ou seja, os problemas são elaborados por meio das situações, dados ou fenômenos da realidade, de modo claro. Ou, ainda, primeiramente, podem-se formular os problemas e depois efetuar o levantamento e a seleção dos dados para fazer suas resoluções (podem-se inverter as 3ª e 4ª etapas). Nesta etapa, elaboram-se perguntas com problematizações que tenham alguma relação com o tema selecionado, variáveis envolvidas e/ou hipóteses levantadas, as quais podem ser realizadas pelo professor e/ou pelos estudantes agrupados. Assim, é essencial refletir sobre as relações existentes apresentadas nos dados organizados, sintetizados e/ou categorizados e sobre as possibilidades para problematizar e fazer suas investigações, análises e resoluções posteriormente.

Nesse desenvolvimento, Barbosa (1999, p. 5) esclarece que “a escolha de um tema e a formulação do problema não matemático a ser modelado podem ficar sob responsabilidade do professor ou do aluno”. Bassanezi (2009, p. 46) esclarece que “o levantamento de problemas deve ser feito em grupos já definidos – o professor não pode propor problemas, mas deve atuar como monitor em cada grupo, sugerindo situações globais que devem ser incorporadas pelos alunos”, uma vez que um problema se constitui em uma pergunta científica. Com base nas etapas anteriores efetivadas, o Quadro 4 a seguir expõe os problemas formulados para os casos notificados de dengue, os quais foram elaborados pelos licenciandos:

Quadro 4 – Formulação de Problemas para os Casos Notificados e Óbitos por Dengue

Casos notificados de dengue	
Formulação do Problema 1	- Que modelo matemático representa a relação entre a semana epidemiológica e o número de casos notificados de dengue para a região Norte? (AG1)
Formulação do Problema 2	- Qual é a relação entre a semana epidemiológica e os casos notificados de dengue para a região Nordeste? Que modelo matemático representa essa relação? (AG2)
Formulação do Problema 3	- Qual é a relação entre a semana epidemiológica e os casos notificados de dengue para a região Sudeste? Que modelo matemático representa essa relação? (AG3)
Formulação do Problema 4	- Qual é a relação existente entre a semana epidemiológica e a região Sul do país? Que modelo matemático pode expressar essa relação? (AG4)
Formulação do Problema 5	- Qual é a relação que há entre os casos notificados da semana epidemiológica e a região Centro-Oeste? Que modelo matemático pode descrever essa relação? (AG5)
Formulação do Problema 6	- Qual é a relação que há entre a semana epidemiológica e a proporção de mortes para a região Centro-Oeste? Que modelo matemático pode expressar essa relação? (AG5)
Formulação do Problema 7	- Qual é a relação entre a região Centro-Oeste e a proporção de mortes? Que modelo matemático pode expressar essa relação? (AG5)

Fonte: Soares (2012b, p. 178-180).

Diante do volume de problemas formulados, vale apresentar seus resultados e discussões conforme o quarto problema exposto no Quadro 4.

• **5ª Etapa – Resolução do Problema – Modelo Matemático e Validação:** é desenvolver, explorar e solucionar o problema formulado, o que permite elaborar um modelo matemático e analisar sua aceitação ou não. Com as ferramentas e recursos reais, matemáticos, didáticos e/ou computacionais, o docente e/ou estudantes agrupados visam resolver o problema. O modelo matemático é resultante da investigação, análise, exploração e transposição de problematizações das situações, dados ou fenômenos da realidade para a linguagem matemática, e, por meio dele, são realizadas a organização, a representação, a resolução e a explicitação de matematizações, visando o ensino e a aprendizagem de matemática, via processos de obtenção da solução do problema formulado. Esse modelo pode ser expresso por meio de um conjunto de símbolos, estruturas e relações matemáticas como gráficos, tabelas, funções, sistemas, equações, expressões matemáticas, diagramas, figuras geométricas, representações estatísticas e/ou físicas, entre outros conceitos. Em sua elaboração analisam-se as hipóteses de resolução e definem-se as variáveis independentes e dependentes e suas representações adequadas. Aqui, exploram-se os conceitos matemáticos que devem estar no programa da disciplina ou não, pois a formulação e a resolução do problema podem abranger um conceito matemático que não está inserido nele, assim como a realização da atividade de modelagem depende de objetivos a serem atingidos, realidades escolares e/ou universitárias, conhecimentos, competências, durabilidades e recursos disponíveis. A Validação do Modelo Matemático pode ou não ser feita conforme a finalidade do objeto de estudo, mas é de suma importância, pois possibilita analisar a relevância ou não do modelo matemático obtido ao

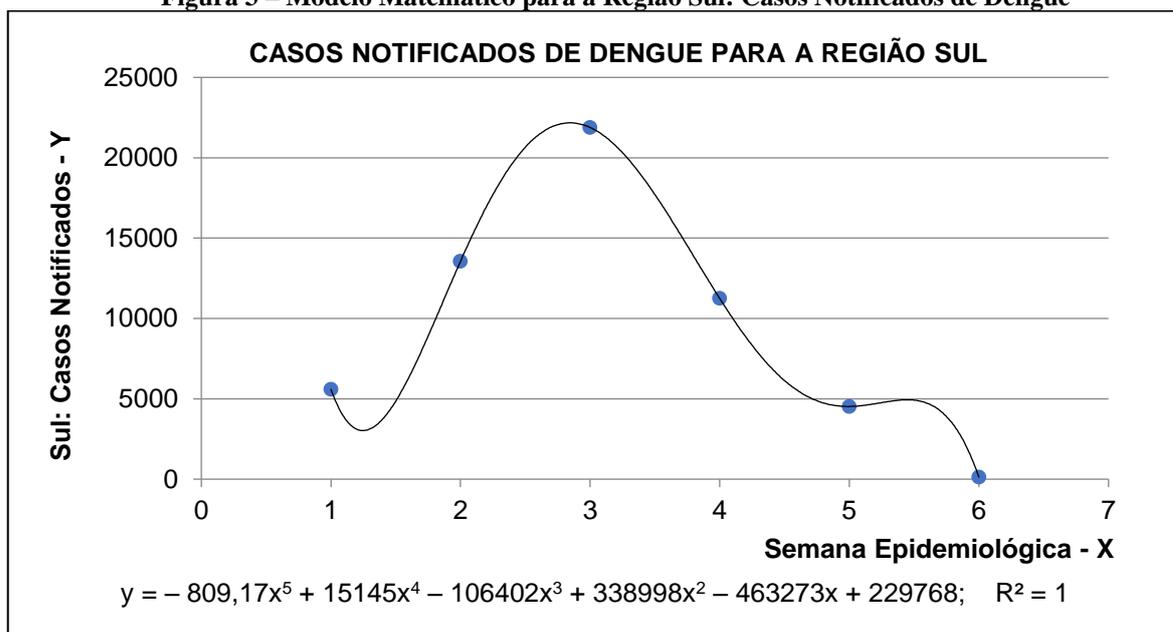
compará-lo com os dados (reais e/ou matemáticos). Quando o modelo matemático não for considerado válido, ou seja, não tiver aproximações com a situação, dado ou fenômeno que o originou, pode-se reiniciar os processos, conforme já foi feito a partir das 3ª ou 4ª etapas de modelagem (ou seja, a partir do levantamento e seleção dos dados ou da formulação do problema), para fazer ajustes na coleta dos dados, na formulação dos problemas, simplificações e/ou modificações plausíveis.

De acordo com Barbosa (1999, p. 5), a modelagem “pode servir como motivação para introduzir novos conceitos e/ou aplicar conhecimentos adquiridos anteriormente”. Com a finalidade de investigar os licenciandos de matemática, a presente pesquisadora interrogou-os: **“Que processos precisam ser feitos para desenvolver e obter a solução do problema? Como se podem obter os modelos matemáticos para esta atividade de modelagem? Como aprender matemática desse modo?”** Posteriormente, os licenciandos foram estimulados a desenvolverem e obterem os modelos matemáticos no *software Microsoft Office Excel*, pois na concepção dos sujeitos do G3: **“Ah! Nós acreditamos que o Excel pode ser mais fácil que o Calc, principalmente para fazer o gráfico”**. E posteriormente os participantes do G2 questionaram: **“Como faz para gerar um modelo matemático no Calc?”**. Outra resposta foi de um acadêmico do G5: **“Eu sei fazer o gráfico no Excel, mas não no Calc!”**. Os licenciandos do G1 fizeram o seguinte comentário: **“Olhe aqui professora, nosso modelo no Calc, mas a linha do gráfico não ficou boa”**, e observando o gráfico obtido a professora indagou: **“Vocês conseguiram obter um modelo que procura responder o problema inicial?”**

Com essa indagação, os participantes do grupo G3 optaram por tentar conseguir o modelo matemático por meio do *Excel* e manifestaram suas conclusões: **“Nosso grupo já conseguiu encontrar o modelo matemático pelo Excel! Nós encontramos um modelo para os casos notificados de dengue para a região Sudeste!”**. Em seguida, um sujeito deste grupo destacou que: **“A linha de tendência da curva ficou certinha, e resultou uma função polinomial de quinto grau”**. Assim foi uma das explicitações dos licenciandos nas resoluções dos problemas.

Nesse sentido, os sujeitos do grupo G4 fizeram a seguinte manifestação ao obter o modelo matemático: **“Professora! Isso é magnífico, encontrar o modelo matemático no Excel!”**, e argumentaram também: **“Nós conseguimos obter uma função polinomial de quinto grau com $R^2 = 1$, perfeita!”**. Também um licenciando desse grupo enfatizou: **“A nossa função representa o modelo para os casos notificados de dengue para a região Sul”**. Assim, Bassanezi (2009, p. 20) chama de “modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Na sequência, serão apresentados o gráfico e a expressão matemática desenvolvidos para a região Sul no *software Microsoft Office Excel* pelo AG4:

Figura 3 – Modelo Matemático para a Região Sul: Casos Notificados de Dengue



Fonte: Soares (2012a, p.73 e 2012b, p. 194).

A expressão matemática obtida é uma função polinomial de quinto grau:

$$y = -809,17x^5 + 15145x^4 - 106402x^3 + 338998x^2 - 463273x + 229768 \quad (1)$$

Essa função polinomial obtida procura evidenciar a pergunta problematizada ao apresentar a relação que há entre a semana epidemiológica e o número de casos notificados de dengue para a região Sul. Dessa maneira, ela propicia mostrar a aplicação da matemática nos temas sociais e o papel dos modelos matemáticos na sociedade.

De acordo com Bassanezi (2009, p. 30), a “Validação é o processo de aceitação ou não do modelo proposto”, visto que “Um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram”. Esse autor esclarece que: “O problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, incluindo seus objetivos e recursos disponíveis” (BASSANEZI, 2009, p. 30). Na validação, analisam-se as proximidades do modelo matemático obtido como dados reais, e sua validade e relevância. Para tanto, segue a validação feita pelo quarto grupo:

Tabela 2 – Validação do Modelo Matemático para a Região Sul: Casos Notificados de Dengue

Semana Epidemiológica – X	Sul: Casos Notificados – Y	Y obtido no Modelo Matemático	Erros do Modelo	Erros gerais do Modelo (%)
1. Janeiro	5.588	5.588,29	0,29	0,000509398%
2. Fevereiro	13.562	13.564,28	2,28	0,004004918%
3. Março	21.884	21.894,47	10,47	0,018391006%
4. Abril	11.243	11.275,96	32,96	0,057895661%
5. Maio	4.525	4.606,25	81,25	0,142719129%
6. Junho	128	298,04	170,04	0,298682593%
Total	56.930	57.227,29	297,29	0,522202705%

Fonte: Soares (2012a, p. 73 e 2012b, p. 195).

Com base nos desenvolvimentos das atividades e na Tabela 2, a validação da relação matemática obtida para a Região Sul tem-se ao observar as proximidades entre os resultados obtidos dos casos notificados de dengue e os dados de origem. Desse modo, os erros estimados para essa relação são válidos, pois são inferiores a 0,3%, enquanto o erro geral estimado é de aproximadamente 0,53%. Assim, pode-se considerar que a função polinomial obtida evidencia similaridades pertinentes com os dados reais e matemáticos investigados.

Assim sendo, vale dizer que todos os modelos matemáticos desenvolvidos, conforme o Quadro 4, expuseram $R^2 = 1$, isto é, coeficiente de determinação do modelo igual a um, revelando proximidades com dados reais, tornando-os adequados para as resoluções e soluções dos problemas para os casos estudados, em que R é o coeficiente de determinação.

A fim de elucidação, com a intenção de atingir os objetivos, as atividades de modelagem possibilitaram explorar e evidenciar os seguintes conceitos matemáticos:

Na sequência, será esclarecida a análise da atividade desenvolvida.

• **Última Etapa – Análise da Atividade Desenvolvida:** é explorar, discutir e evidenciar as principais considerações e/ou conclusões sobre toda a atividade de modelagem matemática desenvolvida. Os estudantes agrupados fazem esta análise, que pode ser descrita e/ou apresentada oralmente por meio de trabalhos, relatórios ou seminários. Aqui, analisam-se os resultados obtidos na resolução do problema, a aplicação do modelo matemático na sociedade, a importância de se pesquisar e aprender a matemática por meio da modelagem, os conceitos matemáticos trabalhados e os desafios, resistências, vantagens e/ou contribuições que obtiveram com a prática aplicada, entre outros itens. Essa análise permite estimular o espírito crítico, reflexivo, ativo e inovador.

Os futuros professores de Matemática do quarto grupo apresentaram por escrito e oralmente suas principais considerações da seguinte maneira:

Com a modelagem no ensino podemos fazer a interdisciplinaridade com várias áreas do conhecimento, tal como a biologia abordando questões do dia a dia e problemas matemáticos sobre o assunto dengue, que representa um dos principais problemas de saúde pública do Brasil. Com essa atividade de modelagem matemática podemos abordar alguns conteúdos como porcentagem, plano cartesiano, equação e função polinomial, módulo, intervalos, distância entre dois pontos, entre outros. [...] Os processos das atividades de modelagem e os modelos matemáticos obtidos possibilitaram que nosso grupo percebesse que a modelagem representa uma excelente ferramenta para o desenvolvimento de nossa atuação profissional, pois nos permite trabalhar a matemática de forma lúdica e por meio de assuntos do cotidiano do aluno. A modelagem matemática é uma alternativa eficiente para nossa formação acadêmica, visto que a princípio nossa opinião em relação à aplicação da modelagem era muito difícil, porém por meio das atividades realizadas, agora, concluímos que não é tão difícil quanto demonstrava inicialmente. (AG4) (SOARES, 2012b, p. 217).

Apesar de algumas resistências iniciais e/ou da falta de conhecimento no assunto, pode-se inferir que os sujeitos tiveram entendimentos sobre e por meio da modelagem matemática nos processos de ensino e aprendizagem. Também, eles mostraram reconhecimentos e compreensões de seu papel, sentido e aplicação, bem como dos modelos matemáticos.

4 CONTRIBUIÇÕES

Soares (2012a, 2012b) afirma que obteve contribuições como a exposição de abordagens pedagógicas para a realização dos processos da modelagem:

Quadro 6 – Abordagens pedagógicas para desenvolver os processos da modelagem matemática

ETAPAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA	Abordagem Pedagógica 1	Abordagem Pedagógica 2	Abordagem Pedagógica 3	Abordagem Pedagógica 4	Abordagem Pedagógica 5
Escolha do Tema	Professor	Professor	Professor/ Estudantes agrupados	Professor/ Estudantes agrupados	Estudantes agrupados
Apresentação do Tema	Professor	Professor	Professor/ Estudantes agrupados	Professor/ Estudantes agrupados	Estudantes agrupados
Levantamento e Seleção de dados	Professor	Professor/ Estudantes agrupados	Professor/ Estudantes agrupados	Estudantes agrupados	Estudantes agrupados
Formulação do Problema	Professor	Professor/ Estudantes agrupados	Professor/ Estudantes agrupados	Estudantes agrupados	Estudantes agrupados
Resolução do Problema: modelo matemático e validação	Professor	Professor/ Estudantes agrupados	Professor/ Estudantes agrupados	Estudantes agrupados	Estudantes agrupados
Análise da Atividade Desenvolvida	Professor/ Estudantes agrupados	Professor/ Estudantes agrupados	Professor/ Estudantes agrupados	Estudantes agrupados	Estudantes agrupados

Fonte: Os autores (2021).

Abordagem Pedagógica 1: o docente expõe, discute e explora com os estudantes agrupados uma atividade de modelagem matemática que já foi estudada e realizada. Assim, os sujeitos refletem, analisam e explicitam as principais considerações sobre toda a atividade de modelagem desenvolvida, a qual pode ser feita em uma ou duas horas-aula regulares, extraclasse e/ou em uma articulação dessas duas situações.

Abordagem Pedagógica 2: o professor escolhe um tema e sintetiza sua importância, posteriormente orientando os estudantes agrupados para o encaminhamento viável para fazer o levantamento e a seleção de dados e a formulação do problema. Essas duas etapas de modelagem são alteráveis, assim cabendo ao docente mediar, analisar e discutir com os estudantes agrupados que etapa é cabível para fazer primeiramente e direcioná-los adequadamente para atingir o objetivo estabelecido. Seguidamente, os estudantes agrupados são motivados e orientados para obter respostas para o problema formulado, bem como analisar e explicitar a atividade desenvolvida, uma vez que essa abordagem é de natureza curta e pode ser feita em alguns dias ou semanas no tempo regular de aula e/ou além dela.

Abordagem Pedagógica 3: em todos os processos da modelagem, desde a escolha do tema até a análise da atividade, o professor orienta os estudantes agrupados por meio de uniões, conexões, indagações e motivações para realizar a dinâmica dos processos de modelagem. O docente é o orientador e o mediador desses processos e quando necessário pode organizar e discutir alguma etapa com a finalidade de estimular os estudantes para fazer atividades dessa natureza. Os sujeitos agrupados são os responsáveis por realizar e apresentar os resultados das

atividades feitas de modelagem. Essa abordagem pode suceder-se por vários dias ou semanas em durabilidade normal de aula ou não.

Abordagem Pedagógica 4: o professor orienta os estudantes agrupados para escolher um tema e sintetizar sua importância. Após, ele os incentiva a fazer o levantamento, a seleção de dados e a formulação do problema, uma vez que essas etapas de modelagem são variáveis, sendo que compete aos participantes analisarem qual dessas duas etapas realizarão inicialmente. Assim, os estudantes agrupados são assessorados a dirigirem, explorarem e resolverem as demais etapas da dinâmica dos processos de modelagem, visto que essa abordagem pode acontecer em diferentes dias ou semanas nas aulas regulares, extraclasse e/ou em uma relação dessas duas situações.

Abordagem Pedagógica 5: os estudantes agrupados são pesquisadores, organizadores e responsáveis por investigar, analisar, estudar, explorar, inventariar, desenvolver e explicitar a dinâmica dos processos de modelagem, que pode decorrer em diversos dias, semanas ou meses no período regular de aula e/ou fora da sala de aula.

Nessa modelagem matemática apresentada, Soares (2012a, 2012b) pesquisou, estudou e aplicou as abordagens pedagógicas 1 e 3, o que proporcionou aos futuros professores de Matemática um espírito reflexivo, crítico e inovador ao obterem subsídios bibliográficos e práticos, assim como o reconhecimento de que a modelagem matemática engloba o seguinte:

- ✓ Todos os processos, desde a escolha do tema a ser trabalhado até a análise da aceitação ou não do modelo obtido (validação);
- ✓ Desenvolvimento das competências para entender e aplicar a Matemática e as habilidades gerais para investigá-la;
- ✓ Exploração e valorização do recurso computacional nas aulas de Matemática;
- ✓ Trabalho com a matemática de forma lúdica, concreta, por meio de assuntos cotidianos do estudante;
- ✓ Despertar de motivações ao apresentar a Matemática presente no cotidiano e ao transpor problemas reais para a linguagem matemática;
- ✓ Possibilidade de envolver a multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e/ou transdisciplinaridade, assim permitindo explorá-la em várias áreas do conhecimento;
- ✓ Exigência de bastante dedicação do professor e muito envolvimento e trabalho do estudante;
- ✓ Possibilidade de entender o papel epistemológico e sociocultural da matemática ao analisar e refletir sobre sua utilização nos contextos sociais e culturais, além de seus fenômenos e em várias situações reais;
- ✓ Não sendo simples, exige muito tempo e dedicação dos participantes, mas é importante para a formação e a vivência em sociedade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, inicialmente, tratou-se da questão proposta, que foi respondida ao longo do texto e de seu objetivo, que foi atingido ao se apresentar o quadro teórico, o processo dinâmico e contribuições para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O objetivo foi alcançado ao se expor uma abordagem da Modelagem Matemática com base em investigação, análise e discussão, além do desenvolvimento e da evidência dos processos

dinâmicos por etapas de Modelagem, em que foram explorados conceitos como os de Funções e Gráficos. Isso foi efetivado conforme a orientação de procedimentos aplicados com os sujeitos em sala de aula, atividades extraclasse, orientações via *e-mail* e articulações desses elementos.

A modelagem matemática é um processo dinâmico que propicia representar os fenômenos naturais e problemas do dia a dia em modelo matemático. Esse processo não tem por finalidade única obter um modelo que represente totalmente a realidade, mas sim estruturar e aplicar os assuntos abordados tanto da matemática quanto de outras áreas do conhecimento. Assim, entende-se que nas atividades de modelagem em educação matemática a elaboração do modelo matemático pode ser ou não formulado nesse processo, pois o mais importante é atingir o objetivo proposto na atividade de modelagem e desenvolver os conceitos matemáticos utilizando os modelos existentes na literatura. Além disso, possibilitar aos estudantes condições para analisar, indagar, discutir, transformar, refletir e solucionar os problemas, compreendendo a Matemática a partir de situações concretas.

Portanto, a modelagem matemática apresenta várias possibilidades para os processos de ensino e aprendizagem de matemática e sua realização pode ser de modo natural, atendendo às condições da sala de aula e/ou extraclasse conforme: clientela, ambiente, realidade escolar, preparação docente, conceitos matemáticos a serem desenvolvidos, recursos disponíveis e objetivos, tendo por foco a aprendizagem. Assim, as atividades de modelagem se revelam necessárias e relevantes para serem desenvolvidas nos cursos de Licenciatura em Matemática ou de Educação Básica com base nos processos dinâmicos expostos, visando à melhoria da aprendizagem de matemática. Isso porque a modelagem pode ser entendida como uma estratégia pedagógica que possibilita resolver e elucidar temas ou problemas extraídos da realidade. Ainda, o seu desenvolvimento pode ser feito de acordo com todas as etapas da dinâmica dos processos de modelagem ou não. Também, em sua organização e realização, é essencial entender o papel e o objetivo das etapas que têm por finalidade orientar os processos de modelagem.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar**. 2. ed. Campinas: Papirus, 1998.

BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? **Zetetiké**, Campinas-SP, UNICAMP, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores**. 267 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” de Rio Claro, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim-RS, v. 27, n. 98, jun. 2003. Disponível em: <<http://www.uefs.br/nupemm/perspectiva.pdf>>. Acesso em: 09 mar. 2012.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BELTRÃO, M. E. P. **Ensino de cálculo pela modelagem matemática e aplicações**: teoria e prática. 319f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados *stricto sensu* em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. Modelagem matemática e aplicações: abordagens para o ensino de funções. **Educação Matemática Pesquisa (On-line)**, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 17-42, 2010.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. (Coleção Ciências da Educação).

BRASIL, Ministério da Saúde. **Balanço Dengue**. Semana Epidemiológica 1 a 26 de 2011. Secretaria de Vigilância em Saúde. Coordenação Geral do Programa Nacional de Controle da Dengue. Brasília: Portal da Saúde, 2011a. Disponível em: <http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/informe_dengue_072011.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2011.

BRASIL, Ministério da Saúde. **Dengue**: prevenção. Brasília: Portal da Saúde, 2011b. Disponível em: <http://portal.saude.gov.br/portal/saude/visualizar_texto.cfm?idtxt=23624&janela=1>. Acesso em: 20 jul. 2011.

BRASIL, Ministério da Saúde. **Dengue**: sintomas. Brasília: Portal da Saúde, 2011c. Disponível em: <http://portal.saude.gov.br/portal/saude/visualizar_texto.cfm?idtxt=23620&janela=1>. Acesso em: 12 jul. 2011.

CHEVALLARD, Y. et al. **Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Sannus; Campinas: Editora da Universidade de Campinas, 1986.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 11-22. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. Tradução de Sandra Regina Netz. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R. et al. (Orgs.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. London: Kluwer Academic Publishers, 1994. v. 13. p. 231-245.

GROENWALD, C. L. O.; SILVA, C. K. da; MORA, C. D. Perspectivas em educação matemática. **Acta Scientiae**, Canoas-RS, v. 6, n. 1, p. 37-55, jan./ jun. 2004.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática**. 2012. 395f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis, 2012.

LOPES, A. R. L. V.; BORBA, M. de C. Tendências em educação matemática. **Revista Roteiro**, UNESCO, v. 16, n. 32, p. 49-61, jul./ dez. 1994.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. Newbury Park: Sage, 1985.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. Rio de Janeiro: E.P.U., 2012.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. N. **Qualitative Data Analysis: an expanded sourcebook**. 2. ed. Thousand Oaks: Sage, 1994.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PIMENTEL, C. **Dengue é um dos principais problemas de saúde pública no Brasil, segundo revista inglesa: prevenção, sintomas, tipos de vírus, tratamentos**. UOL. Brasília, 9 maio 2011, 19h57. Disponível em: <<http://noticias.uol.com.br/ultnot/cienciasaude/ultimas-noticias/2011/05/09/dengue-e-um-dos-principais-problemas-de-saude-publica-no-brasil-segundo-revista-inglesa.jhtm>>. Acesso em: 10 jul. 2011.

REHFELDT, M. J. H. et al. Problematizando experiências de modelagem matemática desenvolvidas no ensino médio. **Revista Dynamis**, FURB, Blumenau, v. 24, n. 1, p. 77-93, 2018.

SILVEIRA, E. **A modelagem em educação matemática na perspectiva CTS**. 202f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

SOARES, M. R. **Caderno pedagógico: modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem: uma perspectiva à luz dos futuros professores de matemática**. 120f. Material instrucional – Produção Técnica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012a.

SOARES, M. R. **Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem: uma perspectiva à luz dos futuros professores de matemática**. 312f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012b.

SOARES, M. R. O conceito de funções nas atividades de modelagem matemática. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 85-97, dez. 2017a.

SOARES, M. R. **Um estado da arte das pesquisas acadêmicas sobre modelagem em educação matemática (de 1979 a 2015) nas áreas de educação e de ensino da Capes: as dimensões fundamentadas e as direções históricas.** 600f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017b.

STEINER, H.-G. Teoria da educação matemática (TEM): uma introdução. Lisboa:
Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática, v. 2, n. 2, p. 19-34, 1993.

ZORZAN, A. S. L. Ensino-aprendizagem: algumas tendências na educação matemática.
Revista Ciências Humanas, Frederico Westphalen, v. 8, n. 10, p. 77-93, jun. 2007.