

## **DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS POR MEIO DA TAREFA “OS PALITOS DE FÓSFOROS”**

*DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC THINKING IN THE FIRST YEARS THROUGH THE TASK "THE MATCHSTICKS"*

---

Valdete Aparecida do Amaral Miné

Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM)

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

[valdetemine@yahoo.com.br](mailto:valdetemine@yahoo.com.br)

Sonia Barbosa Camargo Igliori

Doutora em Matemática – Professora permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM)

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

[sigliori@pucsp.br](mailto:sigliori@pucsp.br)

Jana TRgalová

Doutora em Educação Matemática – Professora associada da Haute école pédagogique du canton de Vaud

HEP - Haute école pédagogique du canton de Vaud

[jana.trgalova@hepl.ch](mailto:jana.trgalova@hepl.ch)

## Resumo

Esse artigo é um recorte da pesquisa de doutorado em andamento que tem como objetivo investigar a trajetória documental de um coletivo de professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental Anos Iniciais, a respeito da formação e desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos. A metodologia da pesquisa acompanha a proposta de investigação reflexiva, cujos procedimentos se ajustam à abordagem teórica utilizada, qual seja a “Abordagem Documental do Didático”, para a qual o processo de desenvolvimento profissional do professor está adequado à documentação de seus recursos no âmbito de sua atuação na sala de aula visando a formação do Pensamento Algébrico em alunos do Ensino Fundamental Anos Iniciais acerca da tarefa “Os Palitos de Fósforo”.

**Palavras-chave:** Pensamento Algébrico. Anos iniciais. Trajetória Documental.

## Abstract

This article is an excerpt from an ongoing doctoral research that aims to investigate the documentary trajectory of a group of teachers who teach Mathematics in the Early Years of Primary School, regarding the formation and development of students' Algebraic Thinking. The research methodology follows the proposal of reflective investigation, whose procedures are in line with the theoretical approach used, namely the "Documentational Approach to Didactics", for which the teacher's professional development process is suited to documenting their resources in the context of their work in the classroom, with a view to forming Algebraic Thinking in Early Years Elementary School students about the task "The Matchsticks".

**Keywords:** Algebraic thinking. Early years. Documentary Trajectory.

## 1 INTRODUÇÃO

O presente artigo traz um recorte da aplicação da tarefa “Os Palitos de Fósforos” em uma turma de primeiro ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais em uma escola pública municipal, no interior de São Paulo, sob a perspectiva da Abordagem Documental do Didático (ADD), a qual trata-se do processo de desenvolvimento do Pensamento Algébrico a partir da aplicação e compreensão da tarefa.

Para tanto, foram utilizados nessa tarefa em específico um conjunto de recursos (palitos de sorvete; cartaz com a representação da sequência de triângulos, sulfite e tirinhas de cartolina, representando os palitos) para a representação dos triângulos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Municipal foram utilizadas pelas professoras durante o planejamento. Com isso, a tarefa foi pautada na habilidade “(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras” (Brasil, 2018, p.276). Nesse sentido, com atenção aos esquemas e representações trazidos pelos estudantes durante o processo formativo no desenvolvimento do Pensamento Algébrico, bem como as ações do professor, trazendo elementos para a contribuição do desenvolvimento profissional e o entendimento da relação existente no processo de apropriação e modificação dos recursos e de seus esquemas de utilização para o trabalho coletivo.

Miyakawa e Xu (2019), trazem o trabalho coletivo como crucial para o trabalho individual da documentação docente em seu desenvolvimento profissional. Os professores do coletivo, sujeitos desta pesquisa, tiveram momentos que puderam refletir a partir das situações e relações do desenvolvimento dos recursos, principalmente durante as incubações, ou seja, “encontros regulares entre os pesquisadores e estudantes de pós-graduação participantes, a cada momento do projeto, para refletir sobre os problemas identificados” (Igliori, 2021, p. 224). Durante as incubações da tarefa “Os palitos de fósforos” visando à formação do Pensamento Algébrico dos alunos envolvidos, o coletivo de professoras teve a orientação e acompanhamento da professora coordenadora pedagógica.

Esta pesquisa tem como objetivo estudar com um grupo de professoras que propõe uma tarefa para desenvolver o Pensamento Algébrico dos estudantes. Esse problema é reformulado na forma de duas perguntas. Com isso organizamos nossas reflexões da seguinte maneira: os referenciais teóricos ancorado na Abordagem Documental do Didático; a metodologia de pesquisa a qual foi possível acompanhar a trajetória documental e o desenvolvimento profissional das professoras e em seguida a aplicação da tarefa com a utilização de esquemas e representações acerca de um conjunto de recursos para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

A Abordagem Documental do Didático (ADD), é uma teoria da Didática da Matemática Francesa voltada ao desenvolvimento profissional dos professores acerca de estudo e interação com recurso, que:

[...] se alimenta de vários quadros teóricos, alguns usuais em educação matemática (a teoria das situações – Brousseau, 1998 - a Teoria Antropológica do Didático – Chevallard, 2002 - ou teoria conceitual Vergnaud, 1996), outros já bem estabelecidos em estudos sobre a inclusão de instrumentos em Didática (Rabardel teoria ergonômica - 1995), outras abordagens, finalmente, mais diretamente relacionadas ao nosso propósito, no campo da engenharia documental (Pedauque, 2006, 2007). Alimentar-se de quadros teóricos significa, para nós, contrair abordagens ou conceitos, colocá-los em um novo contexto e/ou procurar pontos comuns entre os quadros diferentes (Gueudet e Trouche, 2015, p. 6).

A fundamentação e sustentação desses conceitos para a ADD se dá a partir das relações entre os diferentes recursos utilizados pelos professores nas situações propostas para os estudantes, como processo de constituição de um sistema de recursos e respectivos esquemas de utilização de novos recursos em suas representações e esquemas.

O constructo teórico *esquema* “designa a atividade organizada que o sujeito desenvolve em face de determinada classe de situações” (Vergnaud, 2003, p.66). Esse constructo, no âmbito da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), tem uma relevância na funcionalidade da representação e de seu significado em uma estrutura aditiva e multiplicativa. Dessa forma é fundamental para ADD, pois está ligado a “classe de situações, que designa, em nosso contexto, um conjunto de situações profissionais correspondentes a um mesmo objetivo da atividade” (Trouche, *et. al*, 2020, p. 6). Assim, para uma melhor compreensão dos *esquemas*, Vergnaud (1998, p. 173) define como:

(1) Metas (objetivos) e antecipações, pois um esquema está orientado sempre à resolução de uma determinada classe de situações; (2) Regras de ação, busca por informações e controle, que são os elementos que dirigem a sequência de ações do sujeito; (3) Invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação e, portanto, guiam a construção dos modelos mentais; (4) Possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem determinar as regras e antecipações a partir das informações e dos invariantes operatórios dos quais dispõe o sujeito.

Esses quatro componentes permitem melhor compreensão dos *esquemas* os quais proporcionaram melhor análise a partir das informações e dos invariantes operatórios de cada sujeito (professor), para que possam selecionar, discutir em conjunto, transformar e revisar os recursos didáticos.

Reforçando, a noção de esquema “está fortemente ligado ao conceito de classe de situações, que designa, em nosso contexto, um conjunto de situações profissionais correspondentes a um mesmo objetivo da atividade” (Gueudet, Trouche e Pepin, 2020, p. 5). Assim, no decorrer das situações, o professor recorreu a seus esquemas para compreender e intervir nas representações dos estudantes.

O termo representação tem vários significados, Vergnaud (1985) traz alguns significados para o termo, os quais vamos trazer acerca das reflexões a partir da tarefa realizadas pelas professoras e pelos estudantes do Ensino Fundamental Anos Iniciais. Isto é “o conceito de representação é essencial para analisar a formação dos conhecimentos operatórios e para analisar os processos de transmissão dos conhecimentos” (Vergnaud, p.245).

Dessa forma, a representação operatória evidenciou que os estudantes precisam compreender os sentidos e significados dos padrões numéricos, ter o raciocínio a partir de estruturas aditivas e multiplicativas e em outras situações. Nessa busca da formação dos conhecimentos operatórios, os estudantes têm um papel ativo nas situações que remetem a vários conceitos, simbolizações e representações para compreensão desses elementos. Os estudantes devem ser capazes de justificar as situações diversas dentro do quadro do campo das estruturas aditivas e multiplicativa.

No entanto, a realização das situações envolvendo as estruturas aditivas e multiplicativas são desafiadoras para os professores, exigindo conhecimentos específicos do conteúdo trabalhado, competência e investimento durante as aulas para as intervenções necessárias.

As tarefas a partir das representações das situações do campo das estruturas aditivas e multiplicativas promovem aprendizagem dos estudantes, dando atenção especial aos esquemas trazidos durante o processo formativo no desenvolvimento do raciocínio matemático. Entendemos, que o professor nesse processo cognitivo tem o papel de conduzir os estudantes para um grau de conhecimento mais amplo. Assim, “[...] não se pode estudar Matemática sem compreender o processo cognitivo da criança, do adolescente e do professor” (Vergnaud, 2017, p.47). Vale ressaltar que a TCC apresenta características realistas por se tratar de uma teoria voltada a situações ligada à estrutura cognitiva do indivíduo. Nesse sentido, a pertinência em problematizar ideias acerca das representações operatórias permite a evolução do indivíduo.

Vergnaud (1985) a representação é fundamental para que possamos analisar os conhecimentos operatórios e os processos dos conhecimentos. Desse modo, os conhecimentos não se reduzem a serem constituídos apenas no âmbito escolar, muitos são aprendidos fora da escola, com seus familiares, por meio de jogos, brincadeiras e ações do cotidiano.

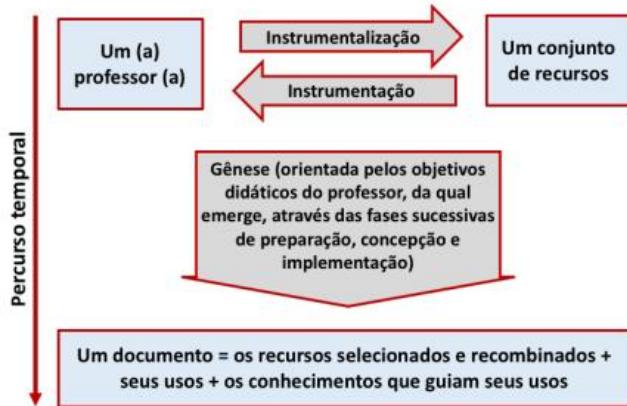
Para melhor compreensão das representações é apresentado por Vergnaud (1985) que *conceito* é um conjunto de situações, invariantes e simbolizações sendo representado por um tripé de três conjuntos:  $C = (S, I, R)$ . Assim temos:

S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedade e relações) associados ao conceito, ou seja, o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações de S; e R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos, diagramas etc.) que podem ser usadas para representar as situações e os procedimentos para lidar com elas. (Curso em Rede/2021).

Vergnaud (1990) apresenta situações tanto do campo conceitual das estruturas aditivas, como das estruturas multiplicativas. Com isso, permite uma melhor percepção da compreensão das estruturas cognitivas das crianças.

Consideramos que os recursos são responsáveis e determinantes na orientação das atividades profissionais dos professores, sendo assim, um potencializador das ferramentas utilizadas no processo de instrumentação dos professores. A ADD traz esses processos que integram professor e recurso, combinando instrumentação e instrumentalização baseada em Rabardel (1995).

### **Figura 1 – Representação de uma gênese documental**



Fonte: Trouche *et. al* (2020, p. 5).

A Figura 1 nos mostra a interação dos professores com um conjunto de recursos. Esse processo é identificado por dois movimentos: 1) processo de instrumentação – o recurso influencia a prática do professor; e 2) processo de instrumentalização – o conhecimento do professor orienta a escolha dos diferentes recursos. Nesse sentido, o desenvolvimento profissional do professor pode ser observado na articulação do movimento cíclico da instrumentalização e instrumentação, ou seja, o conhecimento do professor influencia a escolha do conjunto de recursos e o conjunto de recurso influencia o professor na elaboração do cenário para a aplicação da tarefa. Assim, ao longo do tempo o trabalho documental do professor contribuirá para o desenvolvimento profissional.

Nessa perspectiva Miyakawa e Xu (2019) dizem que os

Recursos como materiais didáticos, planos de aula e livros didáticos desempenham um papel crucial para qualquer trabalho coletivo de professores. A preparação de aulas exige que os professores investiguem e desenvolvam múltiplos recursos. O trabalho dos professores não pode ser dissociado da utilização de recursos – tradução nossa (p.146).

Nesse sentido, os professores desenvolveram, durante a criação e planejamento do cenário, caminhos que os levaram a aprendizagem dos estudantes pautados em esquemas e no uso de um sistema de recursos. Assim, a análise desse processo chamado gênese documental perpassa em mudanças que irão influenciar a prática do professor proporcionando uma evolução em seu fazer pedagógico. Com isso, os caminhos que as professoras percorreram é uma ferramenta potencial para a evolução do desenvolvimento profissional, o que ocorre por meio da instrumentalização e instrumentação de um conjunto de recursos na relação consigo mesmo e com o outro. Nesse sentido que os professores são vistos como criadores de recursos (Pepin, Gueudet, & Trouche, 2017).

Com isso, os professores desenvolvem a cada planejamento caminhos que os levem a aprendizagem dos alunos pautados em esquemas e no uso do conjunto de recursos. Assim, a análise desse processo chamado gênese documental perpassa em mudanças que irão influenciar a prática do professor proporcionando uma evolução em seu fazer pedagógico. Para tanto a Abordagem Documental do Didático

analisa o trabalho dos professores por meio das gêneses documentais. As diferentes gêneses documentais são a trama do trabalho documental dos professores. Este trabalho documental é um motor da evolução dos sistemas de recursos dos professores

e um motor do seu desenvolvimento profissional, via evolução dos seus esquemas (Bellemain; Trouche, 2019, p. 118).

O trabalho coletivo dos professores na maioria das vezes ocorre nas escolas ou em ambientes destinados a discussão e reflexão sobre o ensino. Com isso podemos perceber com mais frequência a interação dos professores com os recursos. Percebemos que “um professor pode disponibilizar recursos para os colegas, mas os processos de compartilhamento, a cooperação ou colaboração não são imediatas” (Gueudet e Trouche, 2015, p. 18). É um trabalho complexo, pois inclui uma variedade de recursos a serem utilizados e adaptados para que se alcance o maior número de estudantes.

## 2.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Para o estudo sobre a formação do Pensamento Algébrico, nossa pesquisa pautou em Kieran (1996, 2004 e 2007), Blanton e Kaput (2005), Radford (2014), dentre outros autores que abordam o Pensamento Algébrico por meio de representações simbólicas de acordo com a faixa etária que estamos trabalhando.

No entanto, para esse artigo, trouxemos para indícios do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, uma introdução progressiva à álgebra, nos anos iniciais do fundamental (primário) foi sugerida (Carraher & Schliemann, 2007). Como vemos foram mais de dez anos dos estudos de Carraher e Schliemann, até a normatização do documento definindo as habilidades básicas em todo território nacional, a BNCC, garantindo e oportunizando a todos os estudantes o mesmo conteúdo para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Nesse contexto, o qual ocorreu a pesquisa sentimos a necessidade em caracterizar a natureza do Pensamento Algébrico em:

(1) indeterminação: o problema envolve números não conhecidos (incógnitas, variáveis, parâmetros etc.); (2) denotação: os números indeterminados envolvidos no problema têm de ser nomeados ou simbolizados. Ora, esta simbolização pode ser efetuada de várias maneiras. Pode-se utilizar sinais alfanuméricos - mas não necessariamente. A denotação de quantidades indeterminadas pode também ser simbolizada através de linguagem natural, gestos, sinais não convencionais, ou mesmo uma mistura destes; (3) analiticidade: as quantidades indeterminadas são tratadas como se fossem números conhecidos. Ou seja, embora não sejam conhecidas, parte-se das quantidades indeterminadas e opera-se sobre elas (isto é, adiciona-se, subtrai-se, multiplica-se, divide-se) como se fossem conhecidas: é isto que significa analiticidade (Radford, 2014, p. 260).

Nesse sentido, o simbolismo algébrico e definições de padrão nos ajudam para o desenvolvimento e evolução do Pensamento Algébrico aproximando e articulando os recursos na estrutura relativa à sequência recursiva utilizada na tarefa em questão. Por consequência, a resolução da tarefa sustenta o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, sendo crucial para elaborar todos os aspectos desse modo particular de raciocínio.

Como estamos trabalhando com estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais iremos nos restringir nas características de natureza da indeterminação trazida por Radford (2014) a qual possibilita a utilização de um conjunto de recursos para a realização da tarefa no desenvolvimento do Pensamento Algébrico com possíveis generalizações.

Para essa discussão e reflexão trouxemos dois questionamentos: 1) Quais contribuições o coletivo de professoras pode influenciar na escolha dos recursos utilizados na elaboração e/ou adaptação da tarefa em questão? 2) Como conceber recursos para contribuir com o

desenvolvimento do Pensamento Algébrico? Os quais estão inseridos na questão norteadora da pesquisa em andamento de “*Como a coordenação pedagógica pode assumir um espaço de acompanhamento da trajetória documental de professores em formação, de modo que possam favorecer o desenvolvimento e formação do Pensamento Algébrico de estudantes do Ensino Fundamental Anos Iniciais?*”

Na próxima seção apresentaremos nossa escolha metodológica onde observaremos o processo da instrumentalização e instrumentação proporcionando o desenvolvimento profissional do professor como o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

### 3 ESCOLHA METODOLÓGICA

A metodologia da pesquisa foi se definindo no decorrer do primeiro semestre da pesquisa os quais foram realizados seminários sobre a ADD e, um desses seminários tratou da Metodologia de Investigação Reflexiva – MIR, sustentada por cinco princípios, que nos norteou no acompanhamento da documentação das professoras sobre o Pensamento Algébrico. Assim, para o acompanhamento do trabalho documental procuramos seguir os seguintes princípios:

1º o princípio de uma ampla coleção de recursos materiais usados e produzidos durante o trabalho documental; 2º o princípio do acompanhamento de longa duração; as gêneses são processos em desenvolvimento e os esquemas se desenvolvem em longos períodos; 3º o princípio do acompanhamento em todos os lugares (dentro e fora da sala de aula). A sala de aula é um local importante onde o ensino planejado é implementado, uma implementação que requer adaptações, revisões e improvisações. No entanto, uma parte significativa do trabalho dos professores ocorre fora da sala de aula: (na escola, por exemplo, na sala dos professores, em casa ou em cursos de formação continuada); 4º o princípio do acompanhamento reflexivo do trabalho documental, em que a visão do professor sobre seu próprio trabalho é amplamente requisitada; 5º o princípio de confrontação, do ponto de vista do professor com seu trabalho documental e a materialidade desse trabalho (materialidade proveniente, por exemplo, da coleção de recursos materiais ou mesmo das práticas do professor em suas aulas) (Trouche et al. 2020, p. 7, tradução nossa).

Dante do exposto, inicialmente iríamos acompanhar a trajetória documental de três professoras, no entanto, optamos pelo acompanhamento de quatro professoras pelo fato de que duas professoras do primeiro ano trabalham em parceria, na elaboração do planejamento e escolha do conjunto de recursos. Com isso, o acompanhamento se deu com duas professoras de primeiro ano, uma professora de segundo e uma do terceiro ano do Ensino Fundamental. As professoras foram selecionadas de acordo com o tempo de atuação no magistério e na unidade escolar. Para tanto, os critérios foram: uma professora de cada ano escolar que estivesse sob a coordenação pedagógica da pesquisadora; uma professora que estivesse no tempo de aposentar; uma professora que estivesse há mais tempo na unidade escolar; e uma professora com pouco tempo de unidade escolar. Diante desses critérios iniciamos o acompanhamento das professoras seguindo os cinco princípios da MIR.

Esse acompanhamento ocorreu na escola e fora dela, durante os HTPs – Horário de Trabalho Pedagógico. Nos HTPs, tempo que os estudantes estavam em aula de arte ou educação física, eram realizados os *feedbacks* pela coordenadora pedagógica de orientação individual a professora relativa ao acompanhamento em sala de aula e planejamento semanal. Os HTPIs – Horário de Trabalho Pedagógico Individual realizados em suas casas, ou outro local, com acompanhamento pelo *WhatsApp*, *e-mail* e vídeos chamadas pelo *Google Meet*. Os HTPCs – Horário de Trabalho Coletivo aconteceram na escola e pelo *Google Meet*. Em sala

de aula, com gravação de vídeo e áudio durante a aplicação da tarefa.

No entanto, para esse artigo trouxemos um pequeno recorte de uma das aplicações da tarefa. Após acompanhar o grupo de professoras durante o trabalho documental e principalmente durante as incubações de criação do cenário para aplicação da tarefa. As incubações foram momentos coletivos os quais as professoras discutiram a resolução da tarefa, ou seja, as incubações foram “encontros regulares entre os pesquisadores e estudantes de pós-graduação participantes, a cada momento do projeto, para refletir sobre os problemas identificados” (Igliori, 2021, p. 224). Durante as incubações da tarefa “Os palitos de fósforos” visando à formação do Pensamento Algébrico dos alunos envolvidos, o coletivo de professores teve a orientação e acompanhamento da professora coordenadora pedagógica.

A partir da tarefa “Os palitos de fósforos”, o coletivo das professoras discutiu e resolveu a tarefa com foco nas interações dos recursos e no processo do design. Nessa perspectiva, Pepin, Gueudet e Trouche (2017) trazem dois momentos: o processo do design individual e o processo do design coletivo. Para esse trabalho, trouxemos o processo coletivo que influencia diretamente ao individual no qual os professores possam “compreender melhor e, potencialmente, aprimorar as abordagens de design do professor de matemática na prática” (p. 801). Com isso, o trabalho coletivo das professoras proporcionou uma discussão acerca do planejamento para a criação do cenário para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

### 3.1 RESOLUÇÃO DA TAREFA: PREPARAÇÃO PARA A APLICAÇÃO

Com o objetivo de atender nossos interesses utilizamos a Metodologia de Investigação Reflexiva os quais tivemos momentos distintos durante a incubação. Para a resolução da tarefa todas as professoras da unidade escolar participaram. Esse coletivo de professoras foi fundamental no processo da documentação docente, no desenvolvimento e evolução do Pensamento Algébrico. Nesse sentido foi apresentado ao coletivo das professoras que teríamos três etapas antes da aplicação em sala de aula:

Etapa 1: Solução para a tarefa – cada grupo de professores os quais foram divididos por ano/série em que lecionam para discutirem e resolverem a tarefa como os estudantes resolveriam e depois eles próprios;

Etapa 2: Possíveis reflexões – conjunto de recursos utilizados, avaliação, resolução, conexões, currículo etc.;

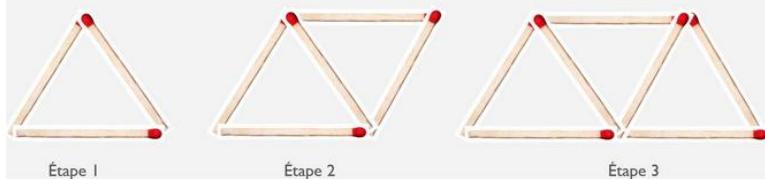
Etapa 3: Criação de um cenário didático – as professoras foram divididas por ano/série que lecionavam para a elaboração do antes, durante e depois da tarefa. Ao final houve a socialização.

A Etapa 3 foi o a que mais demandou atenção e tempo, pois foi feito há todo momento da resolução inferências de como seria com os alunos em sala de aula, tínhamos que pensar nas possíveis perguntas e respostas dos estudantes para nos antecipar e planejar a tarefa à qual fosse a mais próxima possível de como seria no dia da aplicação. Nessa etapa o que ficou mais evidente entre as professoras foi a adequação do conjunto de recursos para que o aprendizado pudesse acontecer.

O Quadro 1 traz a tarefa que foi discutida pelo coletivo de professoras que de acordo com Miné, Igliori e Menezes (2022) “potencializou a preparação e implementação das atividades projetadas para que pudéssemos distinguir o conjunto de recursos que as professoras dispuseram para cada ano (p. 5)” com as adequações e intervenções necessárias durante o processo das representações com o conjunto de recursos.

**Quadro 1 – Tarefa “Os palitos de fósforos”**

Com palitos de fósforo construa triângulos conforme o modelo abaixo



**(5º ano francês – 7º ano no Brasil)**

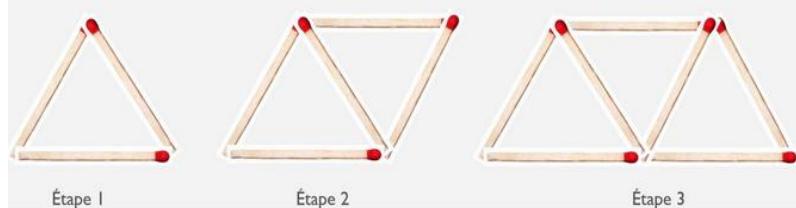
- Quantos palitos de fósforos são necessários para construir 1 triângulo?  
2 triângulos? 5 triângulos? 10 triângulos? 100 triângulos? 265 triângulos?
- Encontre uma fórmula para dizer o número de palitos necessários em função do número de triângulos construídos.

Fonte: Projeto PIPRINT/2021.

A partir da tarefa original, Quadro 1, projetada para o quinto ano do ensino primário francês, as discussões e resolução no coletivo de professoras chegaram a um consenso de não trabalhar com palitos de fósforos e sim palitos de sorvetes com os estudantes de primeiro e segundo ano, devido a faixa etária dos estudantes, além de deixar um tempo para que os estudantes pudessem manusear, brincar, explorar, criar com o recurso. Isso foi justificado pela necessidade que as crianças pequenas têm evidente o lúdico, o faz de conta. Além de sentirem a necessidade de trabalhar com os estudantes a construção um a um, não pulando as construções da sequência. Com isso, foi feita a adaptação da tarefa como segue o Quadro 2.

**Quadro 2 – Tarefa adaptada “Os palitos de sorvete”**

Com palitos de sorvete construa triângulos conforme o modelo abaixo



- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 1 triângulo?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 2 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 3 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 4 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 5 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 6 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 7 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 8 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 9 triângulos?
- Quantos palitos de sorvetes são necessários para construir 10 triângulos?

Para as intervenções :

- O que aconteceu aqui ? Quantos palitos de sorvete foi colocado?
- que vocês observaram? Foi aumentando a quantidade de palitos ou diminuindo? De quanto em quanto?
- Teria uma maneira diferente para que eu pudesse representar o que foi feito com com palitos? Como?

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Com a tarefa “Os palitos de fósforos” proposta para o coletivo de professores pudemos perceber o uso da aritmética associada as representações geométricas para a sistematização e possíveis generalizações. Nesse sentido Kaput (1999) ao

expressar generalizações que significa traduzi-las em alguma linguagem, seja numa linguagem formal, ou, para crianças pequenas, em entonação e gestos. No caso de crianças pequenas, identificar a generalidade expressa ou a intenção da criança de que uma afirmação sobre um caso particular seja considerada geral pode exigir o ouvido atento de um professor que saiba ouvir atentamente as crianças (p. 6).

O Pensamento Algébrico é um processo no qual os estudantes evoluem para a generalização do raciocínio algébrico e matemático, usando conceitos e técnicas. No próximo tópico apresentaremos a aplicação da tarefa e análises iniciais do desenvolvimento e evolução do Pensamento Algébrico.

#### **4 APLICAÇÃO DA TAREFA – OS PALITOS DE FÓSFOROS**

A aplicação da tarefa ficou definida que teria que ser em dias que não tivesse aulas de arte ou de educação física, para que os estudantes pudessem ficar concentrados e envolvidos com a resolução da tarefa no intuito do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, atentos no padrão e regularidade nas representações realizadas com os palitos de sorvetes e na colagem com os palitos de papel. Para tanto, essa tarefa foi planejada para três dias, mas foi possível realizarmos em dois dias. Também ficou decidido que a tarefa seria realizada em duplas como sugere Radford (2009) que “em pequenos grupos (2 a 4 alunos) os alunos discutem melhores os métodos para resolver os problemas apresentados, seguidos de uma discussão geral (ou seja, discussão em classe) conduzida pelo professor (p. 23)”.

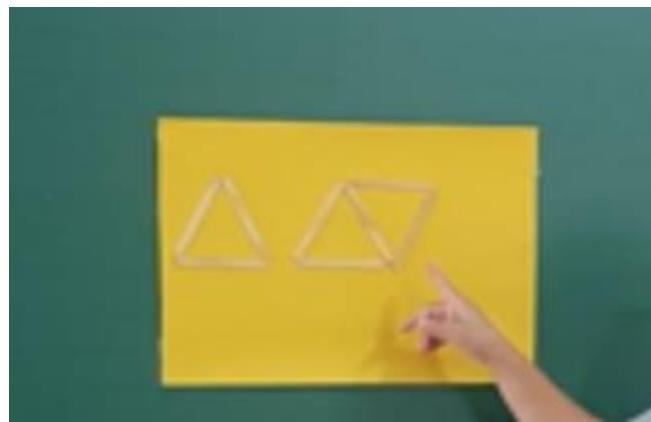
Diante desse contexto, no primeiro dia os estudantes tiveram um momento para que pudessem manusear e criar aleatoriamente figuras com os palitos de sorvetes, para que após iniciassem as representações com orientação e mediação da professora. No segundo a retomada da tarefa com a representação da sequência apresentada pela professora, utilizando o conjunto de recursos. Porém, no segundo dia, a professora retomou a explicação da tarefa e que a dupla deveria realizar juntos, um ajudando o outro, uma mesma representação para os dois. Que os palitos deveriam ficar em um único montinho. A professora enfatizou que a representação da figura seria em dupla. Assim,

A sala de aula deve se tornar uma comunidade de aprendizagem na qual os alunos vejam os frutos de sua participação e trabalhem não em termos de competição individual, mas em termos de cooperação. Essa cooperação é parte do esforço que os alunos fazem ao trabalhar com outros alunos, onde demonstram responsabilidade ao tentar apresentar ideias e entender as dos outros (Radford, 2009, p 25).

Nessa perspectiva que a aplicação foi realizada. Nos dois dias os estudantes trabalham juntos com o intuito de resolver a tarefa buscando indícios que os levassem ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Nessa tarefa foi trabalhado com o ““padrão” a um elemento que, combinado com uma regra, dará origem a uma série. Distinguimos entre padrões repetitivos, em que o padrão é repetido de forma idêntica, e padrões evolutivos, em que o padrão é modificado em cada fase” (Galou, Pio, Roche, Roubin & Trgalova, 2022, p. 10).

Nesse sentido a Foto 1 registra o momento em que a professora realiza a explicação da tarefa com a representação de duas etapas da sequência.

**Foto 1 – Explicação da tarefa**



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Esse recurso utilizado pela professora foi o que mais se aproximou com o que cada dupla iria fazer em suas carteiras para depois fazerem o registro no papel. Para cada representação a professora fazia a pergunta - “Quantos palitos de sorvete são necessários para construir um triângulo?” Passava por todas as duplas, fazendo questionamentos e ouvindo o que cada dupla tinha para relatar sobre a representação. Assim, a cada explicação e orientação da professora os estudantes iniciavam uma nova representação da sequência recursiva da tarefa. A mediação da professora durante o processo das representações intervindo e orientando foi fundamental para o desempenho dos estudantes durante a tarefa os quais pudemos perceber indícios do desenvolvimento e evolução do Pensamento Algébrico. Podemos dizer que “os alunos também poderão usar os desenhos para argumentar a favor das generalizações que encontraram” (Vlassis, Demonty, & Squalli, 2017, p. 136). Nesse sentido, percebemos os indícios nas representações de cada novo triângulo, na percepção do estudante em dizer que precisa de dois palitos para uma nova representação, reconhecendo que há um padrão. Vejamos a Foto 2.

**Foto 2 – Representação dos triângulos**



Fonte: Arquivo da pesquisadora

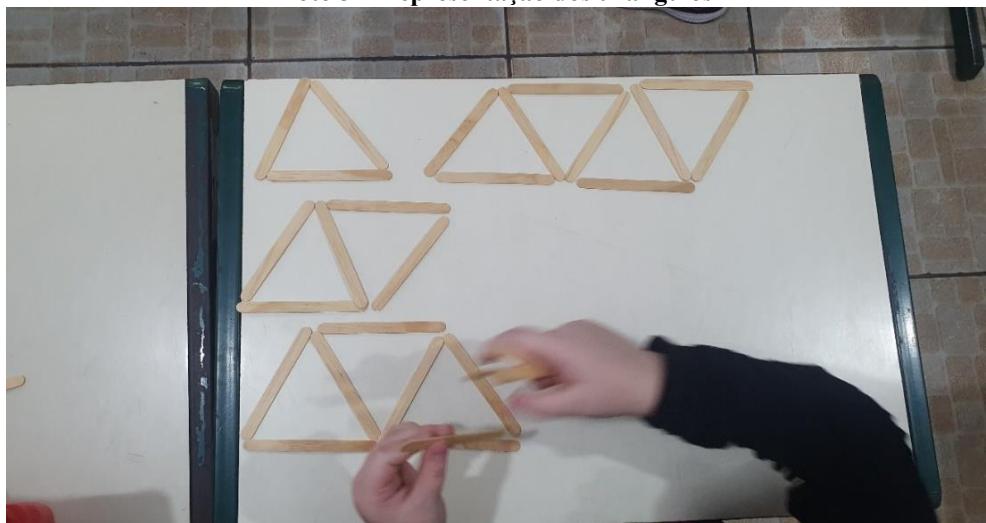
Para as duas primeiras representações dos triângulos os estudantes fizeram sem dificuldade, pois viram na explicação da professora e perceberam que deveriam acrescentar dois palitos, fazendo a contagem. Nesse sentido, percebemos que “um problema de padrão coloca em jogo os dois potenciais de manipulação [...]. Ele permite que os alunos entrem na abstração em vários níveis, seja usando o padrão figurativo ou procurando relações entre os números” (Galou *et al.*, 2022, p. 11). Da terceira representação em diante as intervenções da professora foram direcionadas diretamente as duplas e não no coletivo da turma, pois cada dupla tinha seu tempo para a realização das representações, sendo que a cada nova representação os

estudantes precisariam de dois palitos e não três. Esse “padrão” que a cada nova representação deveriam acrescentar dois palitos e aumentaria um triângulo foi identificado ao longo da tarefa. Nesse sentido,

Essa generalização possibilita a previsão de casos próximos. Entretanto, esse tipo de raciocínio impede que o aluno determine um termo distante a partir de um termo já conhecido, levando em conta “apenas um elemento” da regularidade, no caso, a razão. Esse tipo de generalização ocorre com frequência no caso de sequências aritméticas cujos padrões figurativos são apresentados em ordem crescente (Vlassis, Demonty, & Squalli, 2017, p. 136).

Como podemos observar na Foto 3, a dupla representou as etapas da sequência conforme um triângulo de cada vez, com isso a percepção da regularidade da tarefa que a cada construção aumentariam dois palitos, no caso, a razão de “2”.

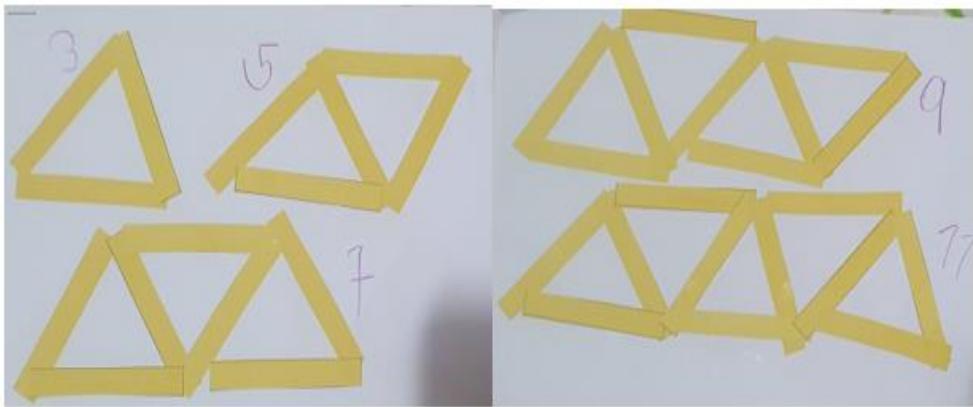
**Foto 3 – Representação dos triângulos**



Fonte: arquivo da pesquisadora

Para a segunda aula, em um dos primeiros anos, a professora retomou o que havia feito na cartolina com a representação dos triângulos. Como na aula anterior os estudantes estavam em duplas, cada dupla recebeu uma quantia expressiva de palitos de papel para que pudessem fazer as representações da sequência dos triângulos em um sulfite. Durante o planejamento as professoras haviam pensado em utilizarem cartolina, no entanto, durante a realização da tarefa, percebeu que a cartolina iria ocupar muito espaço e utilizou o sulfite para que ficasse sobre a carteira.

Na Foto 4 os estudantes puderam após duas aulas de representações da sequência recursiva de triângulos com palitos de sorvete realizarem a tarefa utilizando novos recursos. Nesse sentido, Radford (2009) coloca que “o contexto e a manipulação permitiram que os alunos começassem a realizar raciocínios algébricos complexos em um nível relativamente concreto (p. 41)”. Com isso, pudemos perceber que com o passar das representações dos triângulos os estudantes foram trazendo indícios e estabelecendo relações a cada nova representação para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Percebemos que “para favorecer a aprendizagem, as atividades sobre padrões devem ser propostas regularmente, num formato curto, explorando um padrão de cada vez e assegurando a sua variedade (figurativa ou numérica)” (Piolti-Lamorthe, Roubin, Trgalová & PAREP, 2023, p. 19). Como podemos observar a seguir:

**Foto 4 – Representação com palitos de papel**

Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesse contexto, percebemos que “o pensamento algébrico inicial envolve o uso de números e palavras para expressar transformações aritméticas” (Kieran, 2022, p. 1133). Diante das relações estabelecidas entre a representação dos triângulos e as quantidades de palitos utilizada nas figuras proporcionando indícios para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Nesse sentido, Grugeron-Allys e Pilet (2017) colocam que a transição entre a aritmética e a álgebra convergem para a possibilidade em trabalhar com objetos matemáticos a partir do Ensino Fundamental para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse artigo apresentou um recorte da pesquisa em andamento o qual traz um coletivo de professoras na criação e planejamento de um cenário a partir da tarefa “Os palitos de fósforos” para os primeiros anos do Ensino Fundamental, ancorada na Abordagem Documental do Didático (ADD).

Consideramos que durante a aplicação pudemos observar e identificar que o conjunto de recursos utilizados no desenvolvimento da tarefa pelos estudantes foram essenciais para percebemos indícios do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, além da mediação realizada pela professora durante o processo. Esse recorte, possibilitou a identificação e relevância da metodologia da investigação reflexiva, tanto no individual dos professores quanto no coletivo. Nesse contexto, as interações das professoras entre os recursos e entre si foram fundamentais para a aplicação da tarefa e seus desdobramentos.

Durante a aplicação da tarefa percebemos a importância desse processo na identificação e acompanhamento aos estudantes na evolução e desenvolvimento do Pensamento Algébrico a partir de uma tarefa planejada no coletivo. Com isso, a ADD propõe “mudança de paradigma, analisar o trabalho dos professores pela lente dos “recursos” para o ensino, ou seja, os recursos que eles preparam para nutrir suas práticas de sala de aula, e o que é continuamente renovado por essas práticas” (Trouche *et. al*, 2020, p. 3).

## Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa cedida para realização de doutorado (em andamento) no Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/ PUC-SP.

## REFERÊNCIAS

BELLEMAIN, F. & TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 105-144, 2019.

BLANTON, M.L. & KAPUT, J.J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**. Vol. 36, No. 5, 412-446, 2005.

Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF, 2018.

CARRAHER, D. & SCHLIEMANN, A. Early algebra and algebraic reasoning. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. 2. 669-705, 2007.

GALOU, C. et al. Préparer la pensée algébrique. **Dossier: Enseigner L'Abstraction**. Tangente Éducation n°62, 2022.

GRUGEON-ALLYS, B. & Pilet, J. Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? **Nouveaux cahiers de la recherche en éducation**, 20(3), 106–130, 2017.

GUEUDET, G. & TROUCHE, L. Do trabalho documental dos professores: gêneses, coletivos, comunidades: o caso da Matemática. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, 6 (3), p. 1-43, 2015.

IGLORI, S. B. C. (ORG.). Compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: uma abordagem pelos recursos. – São Paulo: Blucher, 2021.

KAPUT, J.J. Ensinar e aprender uma nova álgebra. **Nas aulas de Matemática que promovem a compreensão** (pp. 133-155). Routledge, 1999.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**. Portugal, v. 16, n. 1, 2007.

KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KIERAN, C. The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), **8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures** (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales, 1996.

MINÉ, V. A. A., Igliori, S. B. C. & Menezes, V. S. Contribuições da Abordagem Documental do Didático para a Formação continuada de Professores dos Anos Iniciais. **In: Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática**. (p.569-578). Brasília (DF) on-line, 2022.

MIYAKAWA, T. & Xu, B. Teachers' Collective Work Inside and Outside School as an Essential Source of Mathematics Teachers' Documentation Work: Experiences from Japan and China, p. 145-172, 2019.

PEPIN, B., GUEUDET, G., & TROUCHE, L. Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources, **ZDM Mathematics Education**, 49(5), 799-812, 2017.

PIOLTI-LAMORTHE, C., ROUBIN, S., TRGALOVÁ, J. Des patterns dans les classes! Au fil des maths de la maternelle à l'université. **Le bulletin de l'APEMP** – Nº 547, 2013.

RADFORD, L. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Mathematics Education Research Journal**, 2014.

RADFORD, L. Les actions didactiques qui favorisent les processus d'abstraction. In: Radford L., Demers S. & Miranda I. **Processus d'abstraction em mathématiques: Repères pratiques et conceptuels** - p. 19-28, 2009.

RADFORD, L. Interprétation et production de graphiques. In: Radford L., Demers S. & Miranda I. **Processus d'abstraction em mathématiques: Repères pratiques et conceptuels** - p. 45-66, 2009.

TROUCHE, L. et.al. A abordagem documental do didático. **DAD-Multilingual**, 2020.

VERGNAUD, G. (2017). A didática é uma provocação. Ela é um desafio. In: Grossi, E.P. (Org.). **Piaget e Vygotski em Gerard Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais TCC**. Porto Alegre, 2017.

VERGNAUD, G. Toward a cognitive theory of practice. In: A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), **Mathematics education as a research domain: A search for identity (pp. 227-241)**. Dordrecht: Kluwer, 1998.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. **Psychologie Française**, p. 245-252, 1985. (Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares, do original em francês).

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In. EP Grossi (Ed) **Por que ainda há quem não aprende? A teoria**. Petrópolis, Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 133-170, 1990.

VLASSIS, J. et al. Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. **Nouveaux cahiers de la recherche en éducation**, 131–155, 2017.