



NÚMEROS IRRACIONAIS: UM MAPEAMENTO DE PESQUISAS SITUADAS NO PERÍODO 2000-2019

*IRRATIONAL NUMBERS: A MAPPING OF ACADEMIC RESEARCHS
BETWEEN 2000-2019*

Wagner Marcelo Pommer

Universidade Federal de São Paulo – Depto de Ciências Exatas e da Terra.

Email de contato: wagner.pommer@unifesp.br

Resumo

Este texto objetivou mapear as pesquisas científicas brasileiras que tiveram como foco temático os números irracionais entre 2000 e 2019. O recurso metodológico foi o Estado da Arte, tendo como fonte de dados o Catálogo de Dissertações e Teses da CAPES e o Google Acadêmico, no entorno da área de Ensino. Verificamos que 53,33% das monografias tiveram como foco principal os números irracionais e 40% exploraram o tema como coadjuvante dos números reais. Quanto ao sujeito de pesquisa, 42,5% das monografias versaram sobre alunos, 22,5% envolveram professores, 22,5% focaram sobre livros didáticos, e 12,5% se debruçaram sobre a epistemologia dos números irracionais ou reais. No quesito área principal do conhecimento do Programa de Pós-Graduação 33,33% se situaram na área da Educação, 30% em Educação Matemática, 10% em Educação em Ciências e Matemática (ou Educação para as Ciências e Matemática), 3,33% em Educação Matemática e Tecnológica, 20% em Ensino de Matemática e 3,33% em Ensino de Ciências e Matemática. Observamos grande diversidade nos referenciais teóricos e metodológicos utilizados, que poderiam contribuir para alargar os horizontes sobre o tema nas necessárias dinâmicas de formação continuada de professores e na elaboração de livros didáticos.

Palavras-chave: Números Irracionais. Estado da Arte. Educação Matemática.

Abstract

This paper aimed to map the Brazilian scientific researches with the thematic focus on irrational numbers between 2000 and 2019. The methodological resource was the State of the Art, having as source of data the Catalog of Dissertations and Theses of CAPES and The Google Scholar, in the surroundings of teaching area. We verified that 53.33% of the monographs had irrational numbers as their main focus and that 40% explored the theme as a complementary part of real numbers. Regarding to the research subject, 42.5% of the monographs were about students, 22.5% involved teachers, 22.5% focused on textbooks, and 12.5% highlighted the epistemology of irrational or real numbers. In the main area of knowledge of the Postgraduate Program, 33.33% are in the area of Education, 30% in Mathematical Education, 10% in Education in Science and Mathematics (or Education for Science and Mathematics), 3.33% in Mathematical and Technological Education, 20% in Mathematics Teaching and 3.33% in Science and Mathematics Teaching. We observed great diversity in the theoretical and methodological references used, which might contribute to broaden horizons on the theme in the dynamics of teacher qualification and at textbook elaboration.

Keywords: Irrational numbers. The State of the Art. Mathematics Teaching.

1 INTRODUÇÃO

No tocante aos documentos prescritivos oficiais brasileiros, os Parâmetros Curriculares Nacionais, descritos em Brasil (1997; 1998), enfatizavam que o conceito dos diversos campos numéricos fazia parte do currículo desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e deveriam ser estendidos até o Ensino Médio.

Conceitos permitem interpretar fatos e dados e são generalizações úteis que permitem organizar a realidade, interpretá-la e predizê-la. Sua aprendizagem desenvolve-se de forma gradual e em diferentes níveis e supõe o estabelecimento de relações com conceitos anteriores (BRASIL, 1998, p. 49).

Um dos pressupostos de tal documento é a abordagem do currículo em espiral, preconizada pelos estudos de Jerome Bruner (1987). O currículo em espiral é um modo de prover abertura para a interação entre assuntos, configurando um dos possíveis caminhos para se priorizar o resgate e a ampliação de conhecimentos.

Nesta perspectiva, considerando-se que o aluno necessita ampliar e aprofundar a noção de número real ao longo da escolaridade básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais apontavam:

[...] ser fundamental colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente (BRASIL, 1998, p. 83).

Mais atualmente, a Base Nacional Comum Curricular, descrita em Brasil (2018), no tocante aos números irracionais, indica somente uma habilidade (EF09MA02) no 9º ano do Ensino Fundamental e, indiretamente, por meio da exploração dos números reais, situa três habilidades (EF09MA01; EF09MA03; EF09MA04), conforme destaca o Quadro 01.

Quadro 01: Habilidades envolvendo os números reais e irracionais na BNCC.

MATEMÁTICA – 9º ANO.	
Objeto do Conhecimento	Habilidade
Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta.	(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.	(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
Potências com expoentes negativos e fracionários.	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
Números reais: notação científica e problemas.	(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

Fonte: Brasil (2018, p. 316-317).

Ressalta-se que na parte específica da Base Nacional Comum Curricular com relação ao segmento educacional do Ensino Médio não há menção aos números irracionais, conforme pode ser verificado em Brasil (2018). Estranhamos tal redução no tocante à apresentação e

desenvolvimento dos números irracionais como objeto de estudo e ferramenta para outros temas da Matemática. Neste sentido, nos indagamos se haveriam pesquisas acadêmicas que poderiam dar suporte ou maior aprofundamento ao tema na escolaridade básica.

Em uma busca inicial desta questão procuramos referências na História da Matemática. Encontramos no livro ‘As Ideias Fundamentais da Matemática’ de Amoroso Costa (1981), original de 1929 e em ‘Conceitos Fundamentais da Matemática’, de Bento de Jesus Caraça (1951), a possibilidade de se desenvolver o ‘Problema da Medida’, por meio do qual se apresentam os segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

O conceito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis fazia parte dos currículos anteriores ao Movimento da Matemática Moderna. Na proposta do Grupo de Estudos em Ensino de Matemática havia uma mudança do programa curricular das Portarias de 1951, pois houve a:

[...] introdução de alguns tópicos novos: o dos ‘números racionais’ – distinto do tópico ‘números fracionários’, por incluir os ‘fracionários relativos’; o dos ‘números reais’ – que antes apareciam como ‘grandezas comensuráveis e incomensuráveis’ ou como ‘números racionais e números irracionais’ (BÚRIGO, 2010, p. 285).

Autores como Hariki (1993), Fischbein; Jehiam; Cohen (1995), Leviathan (2004), Thom (2004), Palis (2005), Sirotic e Zazkis (2007), Machado (2009) e Voskoglou; Kosyvas (2011) realçam a importância dos números irracionais e discutem a problemática de ensino deste tema, apontando alguns caminhos para a escolaridade básica.

Neste mote, este texto objetivou mapear as pesquisas científicas brasileiras que tiveram como foco temático os números irracionais entre 2000 e 2019.

2 O APORTE METODOLÓGICO

Atualmente, a área de Educação Matemática se cercou de inúmeros campos de pesquisas, fato que requer modos de organização desta produção. Ferreira (2002), Fiorentini; Lorenzato (2006) e Romanowski; Ens (2006) indicam as pesquisas do tipo ‘Estado da Arte’ como um possível modo de sistematizar alguns indicadores, como os temas mais pesquisados, os sujeitos de pesquisa, os referenciais teóricos e metodológicos utilizados, dentre outros itens.

Para a coleta de dados optamos por duas fontes. A primeira foi o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (<https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>) e a segunda foi o Google Acadêmico (<https://scholar.google.com.br/schhp?hl=pt-PT>), no período de 2000 a 2019, considerada no âmbito das universidades brasileiras.

No Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES utilizamos o termo ‘irracionais’ na busca simples, tendo surgido duzentos e quarenta e três resultados. Refinamos a busca inicial selecionando textos do tipo Mestrado Acadêmico + Mestrado Profissional + Teses, como também individualizamos a busca para o filtro ‘Grande Área’ nos itens ‘Ciências Exatas e da Terra’, ‘Ciências Humanas’ e ‘Multidisciplinar’, no período entre 2000 a 2019, nas áreas do Conhecimento ‘Educação’, ‘Ensino’ e ‘Ensino de Ciências e Matemática’.

Na Plataforma Google Acadêmico foi inserida a expressão “números irracionais”, entre aspas duplas, entre 2000 e 2019, excluindo patentes e citações, tendo surgido dois mil, quinhentos e setenta textos. Feita a leitura flutuante deste material, que incluiu textos para aulas,

livros, apostilas e artigos, selecionamos somente as dissertações de mestrado acadêmico, profissionalizante e teses no entorno da ‘Educação’ e ‘Ensino’ em Matemática ou em Ciências&Matemática¹. Por leitura flutuante entendemos um primeiro contato com os documentos em que se busca levantar os pontos principais da pesquisa em face dos objetivos (Ferreira, 2002). Observamos que excluímos os textos que indicavam um ou poucos comentários sobre os números irracionais, e sem relação com o objetivo da monografia².

Em seguida, fizemos a leitura de todos os resumos e o texto em formato PDF, pois alguns resumos forneciam dados insuficientes face ao intento desta pesquisa. Para o refinamento dos textos encontrados, se seguiu a leitura flutuante em busca dos dados relevantes, tendo em consideração o modelo de análise das monografias delineado no Quadro 01.

Quadro 01: Modelo de análise das monografias envolvendo os números irracionais.

Informações básicas	Ano, autor, título do trabalho, instituição de origem
Orientador	O tema é foco principal ou é coadjuvante na pesquisa.
Objetivo	Qual o objetivo ou questão de pesquisa?
Sujeito de pesquisa	Aluno; Professor; Material Didático; etc.
Principais referenciais teóricos	Qual (is) o(s) referencial(is) teórico(s) principal(is)?
Principais referenciais metodológicos	Qual (is) o(s) referencial(is) metodológico(s) principal(is)?
Principal contribuição à Educação	Qual a principal contribuição á área da Educação?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante do crivo descrito, selecionamos trinta textos, tomando como critério que as monografias tratavam os números irracionais como o assunto principal, ou como um tema coadjuvante e relevante para a área de ‘Educação’ ou ‘Ensino’ da Matemática na escolaridade básica. Os trinta textos acadêmicos estão referenciados no Apêndice A.

Após esta coleta foram feitas comparações, o que decorreu uma delimitação designada em cinco categorias: **Categoria 1:** Os números irracionais são o foco principal? **Categoria 2:** O sujeito de estudo da pesquisa; **Categoria 3:** As principais referências teóricas das dissertações e teses; **Categoria 4:** As abordagens metodológicas das dissertações; **Categoria 5:** Área do conhecimento do Programa de Pós-Graduação.

¹ O tema dos números irracionais faz parte de pesquisas na área da Matemática em monografias acadêmicas e profissionalizantes. Por ser área de atuação distinta da proposta deste estudo não a incluímos na busca por área.

² Doravante, nesta pesquisa, utilizaremos o termo monografias para designar dissertações e teses.

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Iniciamos esta seção com a descrição e análise dos dados. Na Categoria 1, a questão norteadora foi: Os números irracionais são o foco principal? e a síntese está expressa no Quadro 02.

Quadro 02: Os números irracionais são o foco principal? (Categoria 1).

Critérios	Quantidade	
	Dissertação	Tese
I: Monografias em que os números irracionais são o foco principal.	9	7
II: Monografias em que os números irracionais são o foco secundário.	2	1
III: Monografias em que os números irracionais são tema coadjuvante aos números reais.	8	2
IV: Monografias em que os números irracionais são tema coadjuvante à pesquisa com relação ao Cálculo Diferencial e Integral.	0	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Categoria 1, item I, identificamos as dissertações de Arruda (2007), Borboleto (2008), Lorin (2009), Nakamura (2008), Nobre (2017), Rocha (2018), Santos (2017), Souto (2010) e Souza (2014), que direcionam o texto com foco nos números irracionais. Nesta classificação, também identificamos as teses de doutorado de Broetto (2016), Corbo (2012), Dias (2007), Leão (2017), Pommer (2012), Rezende (2013) e Silva (2006).

Na Categoria 1, item II, reconhecemos as dissertações de Alves (2014) e Dantas (2010), onde os números irracionais são o foco secundário, assim como a tese de doutorado de Costa (2013).

Na Categoria 1, item III, encontramos as dissertações de Bartolomeu (2010), Boff (2006), Cezar (2014), Cunha (2014), Medeiros (2011), Mendes (2012), Penteadado (2004) e Rodrigues (2009), acrescidas das teses de doutorado de Da Silva (2011) e Pasquini (2011), em que os números irracionais representam um tema coadjuvante aos números reais.

Na Categoria 1, item IV, destacou-se a tese de doutorado de Rezende (2003), em que os números irracionais indicam um tema coadjuvante à pesquisa com relação ao Cálculo Diferencial e Integral, este último como assunto principal.

Em síntese, na Categoria 1 (Os números irracionais são o foco principal?) verificamos que 53,33% das monografias têm como foco principal os números irracionais, 10% situam os irracionais como tema secundário, 33,3% exploram o tema como coadjuvante aos números reais e 3,34% como coadjuvante ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

Ao que segue, o texto fez o levantamento da Categoria 2, com referência ao 'sujeito de estudo da pesquisa' (Quadro 03).

Quadro 03: Qual o sujeito de estudo da pesquisa? (Categoria 2).

Sujeito de estudo	Quantidade	
	Dissertação	Tese
1a- Alunos dos anos finais Ensino Fundamental.	2	1
1b- Alunos do Ensino Médio.	3	2
1c- Alunos do Ensino Superior.	4	5
2a- Professores do Ensino Fundamental.	3	2
2b- Professores do Ensino Médio	2	2

2c- Professores do Ensino Superior	1	1
3a- Livro Didático dos anos finais do Ensino Fundamental.	6	1
3b- Livro Didático do Ensino Médio.	1	1
4- Epistemologia da Matemática.	5	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Categoria 2, item 1a, as dissertações de Boff (2006) e Nobre (2017) realizaram investigação com alunos do Ensino Fundamental, especificamente no 8º e/ou 9º ano, assim como a tese de Rezende (2013). Na Categoria 2, item 1b, as dissertações de Bartolomeu (2010), Medeiros (2011) e Rodrigues (2009) fizeram análises com alunos do Ensino Médio, acrescidas das teses de Silva (2006) e Rezende (2013).

Na Categoria 2, item 1c, as dissertações de Cezar (2014), Cunha (2014), Rocha (2018) e Santos (2017) estudaram alunos da licenciatura em Matemática. As teses de Broetto (2016), Da Silva (2007) e Rezende (2013) observaram licenciandos em Matemática, Costa (2013) pesquisou alunos dos cursos de Pedagogia e licenciatura em Matemática e, por último, Pasquini (2011) trabalhou com alunos de um curso de Pós-Graduação em Matemática.

Verificou-se que 42,5% das monografias versam sobre alunos, que representa um item majorante das pesquisas. Destes, 7,14% são alunos do Ensino Fundamental, 11,9% de alunos do Ensino Médio e 21,42% licenciandos. Este último é um importante indicativo, pois é na formação inicial do futuro professor que deve ser enfatizado e trabalhado o tema dos números irracionais.

Na Categoria 2, item 2a, as dissertações de Borboleto (2008), Dantas (2010) e Mendes (2012) realizaram investigação com professores do Ensino Fundamental, acrescidas das teses de Corbo (2012) e Dias (2007). Na Categoria 2, item 2b, as dissertações de Borboleto (2008) e Penteado (2004) realizaram investigação com professores do Ensino Médio, ao lado das teses de Corbo (2012) e Dias (2007). Na Categoria 2, item 2c, a dissertação de Cunha (2014) fez investigação com professores do Ensino Superior, no mesmo mote que a tese de Da Silva (2007).

Em síntese, na Categoria 2, item 2, encontraram-se 22,5% das monografias envolvendo professores, onde 11,90% atuam no Ensino Fundamental, 9,52% trabalham no Ensino Médio e 4,76% são docentes do Ensino Superior.

Na Categoria 2, item 3a, as dissertações de Alves (2014), Boff (2006), Borboleto (2008), Nakamura (2008), Souto (2010), Souza (2014) e a tese de Pommer (2012) analisaram livros didáticos do Ensino Fundamental. Na Categoria 2, no item 3b, a dissertação de Souto (2010) e a tese de Pommer (2012) examinaram livros didáticos do Ensino Médio.

Em resumo, na Categoria 2, item 3, o livro didático representou 22,5% dos textos analisados, sendo que a maioria versava sobre os manuais dos anos finais do Ensino Fundamental (16,66%). Isto encontra ressonância nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1997; 1998), que enfatizavam mais o trabalho dos números irracionais no Ensino Fundamental.

Na Categoria 2, item 4, as dissertações de Arruda (2007), Leão (2017) e Lorin (2009) tiveram como referencial teórico e metodológico o conhecimento matemático já estabelecido com relação aos números irracionais, totalizando 12,5% das pesquisas.

Passamos agora para a Categoria 3, onde foram consideradas as principais referências teóricas das dissertações e teses, que se encontra no Quadro 04.

Quadro 04: Análise da Categoria 3 (As principais referências teóricas).

Referencias teóricas	Diss.	Teses
Abordagem histórica: Chervel (1990), Schubring (2003).	1	0
Compreensão instrumental e relacional: Skemp (1976).	0	1
Componentes formais, intuitivos e algorítmicos: Fischbein (1994).	0	1
Construcionismo e micromundo: Papert (1980).	1	0
Construtivismo: Jean Piaget (1978); Glasersfeld (1995).	0	1
Conhecimentos sobre os números irracionais na Educação Básica: Corbo (2012).	1	0
Cooperação e Colaboração: Brown (1989), Nacarato e Lopes (2009).	1	0
Currículo: Escudero (1992 apud Pires, 2007); Garcia (1998 apud Pires, 2007).	1	0
Desequilíbrios no ensino da Matemática: Machado (2009).	0	1
Epistemologia da matemática: Arruda (2007), Bartolomeu (2010), Boyer (1974); Euclides (2009); Gundlach (1992); Penteadó (2004); Mendes (2012); Nakamura (2008).	5	1
Exemplos prototípicos: Hershkowitz (1994).	0	2
Formação de Professores: Imbernón (2000); Shulman (1986a); Tardif (2000).	1	1
Formação de Professores: Shulman (1986b; 1987).	0	1
Imagem conceitual: Tall&Vinner (1981).	0	4
História da Matemática: Brolezzi (2004); D'Ambrosio (2011); Eves (1997); Jankvist (2009); Lintz (1999).	2	1
História da Matemática e da Arquitetura: Fletcher (2000).	0	1
História e Epistemologia da Matemática: Jahnke (2003).	0	1
Matemática Investigativa: Ponte (1994).	1	0
Modelo da reta numérica como contexto articulador: Christiansen (2003).	1	0
Modelo dos Campos Semânticos: Lins (2012).	1	0
Obstáculo epistemológico: Gaston Bachelard (2003).	1	0
Narrativas na cognição humana: Bruner (2001; 2002).	1	0
Números irracionais: Sirotic e Zazkis (2007); Fischbein, Jehiam e Cohen (1995).	1	0
Rede de significados: Machado (1995).	0	2
Reformas Curriculares nas instituições escolares: Viñao (2000).	1	0
Revoluções científicas: Kuhn (2006).	1	0
Revoluções científicas na Matemática: Gilli Martins (2005); Gillies (2007).	1	0
Tecnologias em Educação Matemática: Levy (1993).	1	0
Teoria Antropológica do Didático: Chevallard (1999).	2	0
Teoria da Atividade: Moura (1996).	0	1
Teoria de Registros de Representação Semiótica: Duval (2003).	1	0
Teoria dos Campos Conceituais: Vergnaud (1990).	0	0
Vulgata: Chervel (1990).	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em particular, na Categoria 3, destacamos que 13,15% dos textos acadêmicos centralizam as referências teóricas na epistemologia da matemática e 10,96% apresentam discussões em torno da área da História da Matemática.

No Quadro 05 apontamos as principais referências metodológicas das monografias.

Quadro 05: Análise da Categoria 4 (As abordagens metodológicas das dissertações).

Referencias metodológicas	Diss.	Teses
Abordagem Histórica: sem menção.	1	0
Análise de conteúdo: Bardin (1977).	1	0
Análise documental (Livros didáticos): Choppin (2004).	1	1
Análise Matemática.	4	1
Avaliação Diagnóstica [Pré-teste (testes e questões abertas) e entrevista]: Luckesi (2005).	1	0
Avaliação Diagnóstica (Avaliação escrita + Entrevista com alunos): Rodrigues Neto (1998).	0	1
Design Based Research: Matta (2016).	1	0

Design Experiments: Pesquisa diagnóstica e Interventiva: Cobb et al (2003).	1	1
Engenharia Didática: Artigue (1995) e Machado (1999).	1	0
Entrevista, análise de manuais didáticos e documentos oficiais: sem referência definida.	0	1
Estudo de caso: Lüdke; André (1986).	1	0
Estudo Diagnóstico e Exploratório: sem referência definida.	0	1
História da Matemática.	1	0
Investigações matemáticas: Ponte et al. (1998) e Abrantes et al. (1999).	1	0
Mapas de relevância (Cartografia Simbólica): Santos (2000).	0	1
Método Clínico: Delval (2002).	0	1
Núcleos de significação: Aguiar e Ozella (2006).	0	1
Observações e entrevistas com alunos de Pós-Graduação: Bogdan; Biklen (1994).	0	1
Pesquisa-ação: Barbier (2012) e Thiollent (2003).	1	0
Pesquisa-ação: Thiollent (2003).	0	1
Pesquisa de Campo quanti-qualitativa: Strauss e Corbin (2008).	0	1
Pesquisa Colaborativa e interventiva: Fiorentini (2004).	0	1
Pesquisa documental: Gil (991).	1	0
Pesquisa documental: Marconi e Lakatos (2006).	1	0
Pesquisa qualitativa: Bogdan e Biklen (1994).	2	0
Pesquisa bibliográfica: Gil (991); Marconi e Lakatos (2006).	1	0
Teoria dos Registros de Representação Semiótica: Duval (1993).	2	0
Teoria Antropológica do Didático: Chevallard (1999).	2	0
Módulo didático (aprendizagem superficial e profunda): Entwistle (1988).	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Categoria 3 e 4 não houve prevalência de referenciais teóricos ou metodológicos. Essa diversidade que é um indicativo salutar para se trilhar novos caminhos, em um futuro, envolvendo uma possibilidade de apropriação destes aportes pelos autores de livros didáticos para a escolaridade básica.

Na Categoria 5 colocamos a classificação quanto a área do conhecimento mais geral do Programa de Pós-Graduação, conforme apontado no Quadro 06.

Quadro 06: Área do conhecimento do Programa de Pós-Graduação? (Categoria 5).

Tipo de Monografia	Área de Concentração	Total
Mestrado Acadêmico	Educação	3
	Educação Matemática	5
	Educação em Ciências e Matemática	2
	Educação Matemática e Tecnológica	1
	Ensino de Matemática	1
Mestrado Profissional	Educação Matemática	1
	Ensino de Matemática	5
	Ensino de Ciências e Matemática	1
Doutorado	Educação	7
	Educação Matemática	3
	Educação para a Ciência e a Matemática	1
TOTAL		30

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Categoria 5, que envolve a discriminação da área principal do conhecimento desenvolvido pelas monografias analisadas nos diversos Programas de Pós-Graduação, levantamos que 33,33% se situam na área da Educação, 30% em Educação Matemática, 10% em Educação em Ciências e Matemática (ou Educação para as Ciências e Matemática), 3,33% em Educação Matemática e Tecnológica, 20% em Ensino de Matemática e 3,33% em Ensino de Ciências e Matemática.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema dos números irracionais, indicado na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), representa um momento chave no ensino da Matemática, pois contrapõe o Universo dos números racionais, usualmente apresentado em um viés pragmático desde o 3º ano do Ensino Fundamental, com um assunto de natureza teórica, que é o caso dos números irracionais. E, nesse contexto de contraposição dos números racionais e irracionais, surge também a inserção do conjunto dos números reais, que constitui o conjunto de referência em diversos campos de estudo da Matemática desenvolvida no Ensino Médio.

É neste entorno que se situa a importância da discussão da introdução dos números irracionais no ensino deste tema, conforme os estudos de Leviathan (2004), Thom (2004), Palis (2005), Sirotic e Zazkis (2007), Machado (2009) e Voskoglou; Kosyvas (2011). Assim, alguns caminhos para o ensino dos números irracionais podem contribuir para a escolaridade básica. É nesse sentido que o mapeamento de pesquisas envolvendo tal tema se fez oportuno.

A realização do Estado da Arte no período de 2000 a 2019 revelou que as trinta monografias acadêmicas encontradas nas duas bases representam um pequeno número de pesquisas que tem referência sobre os números irracionais. Ademais, Caraça (1951) apontava que este tema representa uma ideia fundamental da área tanto na escolaridade básica como para o ensino de diversas áreas do Ensino Superior.

Constamos que três monografias tomaram os números irracionais como tema secundário, dez como tema coadjuvante aos números reais e uma única como tema para ajudar no ensino de Cálculo Diferencial e Integral no segmento do Ensino Superior. Assim, das trinta monografias disponibilizadas, somente dezesseis delas tiveram foco principal no tema dos números irracionais na escolaridade básica.

Isso reduz a possibilidade de maior discussão envolvendo o tema dos números irracionais, pois ao se considerar uma pesquisa envolvendo os números reais implicaria uma retomada mais abrangente em se considerando os números naturais, inteiros, racionais e os próprios irracionais. Esse fator dilui a problemática específica, reduzindo os números irracionais a um subconjunto dos números reais.

Em se considerando a Base Nacional Comum Curricular, descrita em Brasil (2018), que indica os estudos deste tema somente no 9º ano, em habilidades atreladas aos números reais, e que os autores de livro didático usualmente ficam restritos as recomendações dos documentos oficiais, fica registrada a preocupação com a introdução e desenvolvimento do tema na escolaridade básica.

Nos textos analisados 65% envolviam elementos humanos, sendo que 42,5% focaram alunos (sendo 21,42% licenciandos) e 22,50% trataram com professores. Este resultado é um importante indicativo, pois as pesquisas com licenciandos e professores situam um momento

de formação inicial e continuada do docente, que é um item a ser enfatizado e trabalhado em se considerando o ensino dos números irracionais na escolaridade básica.

Outro favorável observado nas monografias pesquisadas foi a grande diversidade nos referenciais teóricos e metodológicos utilizados. Este resultado pode contribuir para alargar os horizontes sobre o trabalho com o tema nas dinâmicas de formação de professores e na elaboração de propostas em materiais didáticos.

Em face das observações realizadas com relação ao levantamento das dissertações e teses fica a recomendação de haver mais pesquisas envolvendo o tema no entorno da área da Educação. Ainda, faz-se necessário que tais contribuições trazidas pelas monografias sejam verificadas em Matemática.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.
- _____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental (Matemática)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- _____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRUNER, S. J. **O Processo da Educação**. 8. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1987.
- BÚRIGO, E. Z. Tradições Modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. **Bolema, Rio Claro (SP)**, v. 23, n. 35b, p. 277- 300, abr. 2010.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Portugal: Lisboa, 1951.
- COSTA, M. A. **As Idéias Fundamentais da Matemática e Outros Ensaio**s. 3. ed. São Paulo: Edusp, 1981.
- FERREIRA, N. S. de A. As pesquisas denominadas ‘estado da arte’. **Educação & Sociedade**, Campinas, ano 23, n. 79, p. 257-72, ago. 2002.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- FISCHBEIN, E.; JEHAM, R.; COHEN, D. The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**. v. 29, n. 1, p. 29-44, jul. 1995.
- HARIKI, S. Sobre Frações Próprias, Impróprias e Aparentes. **Revista do Professor de Matemática**. n. 23, p. 19-22, 1993.
- LEVIATHAN, T. Introducing real numbers: when and how? **In: Anais ... Proceedings of ICME 10**, 2004.

MACHADO, N. J. **Sobre alguns desequilíbrios na apresentação da Matemática básica:** discreto/contínuo, finito/infinito, exato/aproximado, determinístico/aleatório. São Paulo: IME-USP, 2009.

PALIS, G. L. R. Educação Matemática: entrelaçando pesquisa e ensino, compreensão e mudança. **Revista Educação On-Line**, n. 1, 2005.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo ‘estado da arte’ em educação. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 37-50, set.-dez. 2006.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, 2007. p. 49–76.

VOSKOGLOU, M; KOSYVAS, G. A study on the comprehension of irrational numbers. **Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)**, n. 21, 2011.

THOM, R. **A Aporia Fundadora das Matemáticas**. Enciclopédia Einaudi, v. 43, 2004. p. 650-664.

APÊNDICE A: Relação de monografias pesquisadas

ALVES, R. B. **Os números em sua representação decimal:** de Euclides Roxo ao Movimento da Matemática Moderna. 2014. 128f. Mestrado (Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2014.

ARRUDA, E. J. **O número de Euler e os fundamentos dos números reais**. 2007. 148 f. Mestrado (Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2007.

BARTOLOMEU, V. S. **Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionados ao conjunto dos números reais**. 2010. 80f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

BOFF, D. S. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006. 234f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

BORBOLETO, A. R. S. **Reflexões relativas às definições do número PI e a presença de sua história em livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental**. 2008. 139f. Dissertação (Educação) - Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, 2008.

BROETTO, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. 2016. 422 f. Doutorado (Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

CEZAR, M. S. **Produções de significados matemáticos na construção dos números reais**. 2014. 167f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

CORBO, O. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na educação**. 2012. 311 f. Doutorado (Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2012.

COSTA, F. V. **Um estudo sobre a apreciação do raciocínio matemático na formação inicial de professores.** 2013. 177 f. Doutorado (Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

CUNHA, C. L. **O ensino dos números reais na formação do professor de matemática.** 2014. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente, 2014.

DA SILVA, A. L. V. **Números Reais no Ensino Médio: Identificando e possibilitando imagens conceituais.** 2011. 333f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

DANTAS, W. G. **Os saberes e concepções acerca das práticas dos professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental em escolas públicas do Estado de São Paulo em um processo de implementação de currículo.** 2010. 181 f. Mestrado (Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2010.

DIAS, M. S. **Formação da imagem conceitual da reta real: Um estudo do desenvolvimento do conceito.** 2007. Tese (Doutorado em Educação)- Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

LEAO, A. F. **Euclides e a Incomensurabilidade: O Profundo Teor das Abrangências (Os Sumos e Segredos do Livro X).** 2017. 330 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2017.

LORIN, J. H. **Uma Revolução Científica na Matemática: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano.** 2009. 95 f. Mestrado (Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

MEDEIROS, J. **Uma abordagem de ensino dos números reais.** 2011. 141f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

MENDES, S. C. C. **Práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais.** 2012. 113 f. Mestrado Profissional (Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

NAKAMURA, K. **Conjunto dos números irracionais: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares.** 2008. 126f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

NOBRE, R. B. **Sobre as possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental.** 2017. 188f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação.** 2007. 209f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

PENTEADO, C. B. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.** 2004. 247 f. Mestrado (Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

- POMMER, W. M. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico:** uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. 2012. 235 f. Doutorado (Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- REZENDE, V. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses:** um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino. 2013. 209 f. Doutorado (Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. 486f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- ROCHA, R. R. M. **Sensibilização para existência dos números irracionais.** 2018. 156 f. Mestrado (Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.
- RODRIGUES, M. A. S. **Explorando números reais através de uma representação visual e sonora:** Um estudo das interações dos alunos do Ensino Médio com a ferramenta MusiCALcolorida. 2009. 247 f. Mestrado (Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.
- SANTOS, A. S. **Um estudo sobre o conceito de densidade do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais:** uma abordagem com tecnologias. 2017. 132f. Mestrado (Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.
- SILVA, G. E. A. **Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no Ensino Médio.** 2006. 192 f. Doutorado (Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.
- SOUTO, A. M. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica,** 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- SOUZA, F. A. S. **A introdução do conceito de grandezas incomensuráveis/números irracionais nos anos finais do Ensino Fundamental:** uma análise crítica dos livros didáticos. 2014. 150 f. Mestrado (Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.
- APÊNDICE B – Principais referenciais teóricos das dissertações e teses.**
- BACHELARD, G. **A epistemologia.** Lisboa: Edições 70, 2000.
- _____. **O novo espírito científico.** Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2001.
- BOYER, C. B. **História da Matemática.** Editora Edgard Blucher. São Paulo. 1974.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (Matemática). Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BROLEZZI, A. C. **Epistemologia e História:** anotações para uma História da Matemática às Avessas. SEMA, 2004.
- BROWN, J. S.; COLLINS, A.; DUGUID, P. Situated cognition and the culture of learning. **Educational Researcher.** v. 18, n. 1, p. 32-42, jan-feb. 1989.
- BRUNER, J. **A cultura da Educação.** Porto Alegre: Artmed. 2001.

_____. **Realidade mental, mundos possíveis.** 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2002.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação.** n. 2, p. 177-229. Porto Alegre, 1990.

CHEVALLARD, Y. L'analyse de pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 19, n. 2, p. 221-226, 1999.

CORBO, O. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica.** 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante, São Paulo, 2012.

D'AMBROSIO, U. **Uma Síntese Sociocultural da História da Matemática.** Proem Editora. São Paulo. 2011.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** 2. ed. São Paulo: Papirus, 2003, p.11-33.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução e comentários de Irineu Bicudo. Editora da UNESP. São Paulo. 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 2. ed. Campinas: UNICAMP, 1997.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRABER, R.; WINKELMANN, B. (ed.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.** Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 231-245.

FISCHBEIN, E.; JEHAM, R.; COHEN, D. The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics.** v. 29, n. 1, p. 29-44, jul. 1995.

FLETCHER, R. Golden Proportion in a Great House: Palladio's Villa Emo. **Nexus Network Journal,** v. 3. n. 2, Florence: CasaliniLibri, 2000.

GILLI MARTINS, J. C. **Sobre revoluções científicas na Matemática.** 2005. 175f. Tese de Doutorado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

GILLIES, D. **Revolutions in Mathematics.** New York: Oxford University Press, 1992.

KUHN, T. S. **A Estrutura das Revoluções Científicas.** 9. ed. Trad. B. V. Boeira e N. Boeira. São Paulo: Editora Perspectiva S. A, 2007.

GLASERSFELD, E. von. **Construtivismo radical: Uma forma de conhecer e aprender.** Portugal: Instituto Piaget, 1995.

GUNDLACH, B. H. **Tópicos de História da Matemática: Números e Numerais.** Tradução de Hygino H. Domingues. Atual Editora. São Paulo, 1992.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos Psicológicos na Aprendizagem da Geometria e Visualização em Geometria: as duas faces da moeda. **Boletim GEPEM**, v. 32, Rio de Janeiro, 1994.

IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza**. São Paulo: Cortez, 2000. Coleção Questões da Nossa Época, v.77.

JAHNKE, H. N. **A History of Analysis**. American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2003.

JANKVIST, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational studies in mathematics**, v. 71, p. 235-261, 2009.

KUHN, T. S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. 9. ed. Trad. B. V. Boeira e N. Boeira. São Paulo: Editora Perspectiva S. A, 2007.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LINS, R. C. O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. (org). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012, p. 11- 30.

LINTZ, R. G. **História da Matemática**. v. 1. Editora da FURB – Universidade Regional de Blumenau. Blumenau: 1999.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. São Paulo: Cortez Editora, 1995.

_____. **Sobre alguns desequilíbrios na apresentação da Matemática básica: discreto/contínuo, finito/infinito, exato/aproximado, determinístico/aleatório**. São Paulo: IME-USP, 2009.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, n. 12, p. 29-43, 1996.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. **Escritas e Leituras na Educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PAPERT, S. **Mindstorm: Children, Computers and Powerful Ideas**. London: Harvester Press, 1980.

PIAGET, J. **Psicologia e epistemologia: por uma teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1978.

PIRES, C. M. C. **Currículos de matemática: da organização linear à ideia de rede**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de São Paulo, 1996.

PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Lisboa: Grupo de Investigação DIF, v. 2, n. 2, p. 93-169, 1994.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática: notas de aula**. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados, 2003.

SHULMAN, L. S. Paradigms and research programs for the study of teaching. A Contemporary Perspective. In: WITROCK, M. C. (ed.). **Handbook of Research in Teaching**. 3. ed., p. 3-36. New York: Macmillan, 1986a.

_____. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, 15, 1986b, p. 4-14.

_____. **Knowledge and teaching: Foundations of the new reform**. Harvard Educational Review, v. 57, 1987, p. 1-21.

SIROVIC, N; ZAZKIS, R. Irrational Numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 49-76, 2007.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20–26, 1976.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, 1981, p. 151-169.

TARDIF, M.. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. **Revista Brasileira de Educação (Belo Horizonte)**, n. 13, p. 5-24, 2000.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VIÑAO, A. F. Culturas escolares y reformas (sobre la naturaleza histórica de los sistemas e instituciones educativas). **Revista Teias**. v. 1, n. 2, p. 1-25, 2000.

THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **More topics in Mathematics for elementary school teachers**. 2. ed. Thirteen Yearbook, Virginia, 1974.

APÊNDICE C – Principais referências metodológicas das dissertações e teses

ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: Grupo Matemática Para Todos (Investigações na sala de aula) e Associação de Professores de Matemática, 1999.

AGUIAR, W. M. J.; OZELLA, S. Núcleos de significação como instrumento para a apreensão da constituição dos sentidos. **Psicologia: ciência e profissão**, Brasília, v. 26, n. 2, 2006.

ARTIGUE, M. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, p. 33-59.

BARBIER, R. **A Pesquisa-Ação**. Tradução Lucie Didio. Nova Edição. Brasília: Liber Livro Editora, 2012.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Rio de Janeiro: Edições 70, 1977.

BOGDAN, R. E.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994 (reimpressão de 1982).

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

CHEVALLARD, Y. L'analyse de pratiques enseignantes em théorie antropológica do didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 19, n. 2, p. 221-226, 1999.

CHEVALLARD, Y; BOSH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didática: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set.-dez. 2004.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; SCHAUBLE, L. Design Experiments in Education Research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, 2003.

DELVAL, J. **Introdução à prática do método clínico**. Porto Alegre: ARTMED, 2002.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de La pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 5. IREM-ULP, Strasbourg. 1993, p. 37-65.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. 2. ed. São Paulo: Papyrus, 2003. p. 11-33.

ENTWISTLE, N. J. **La Comprension del aprendizaje em el aula**. Madrid: Paidós/MEC, 1988.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: FIORENTINI, D.; ARAÚJO, J. L. (org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 47-76.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1991.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

LUCKESI, C. C. Avaliação da aprendizagem na escola: reelaborando conceitos e recriando a prática. **In: Anais ... Malabares Comunicação e Eventos**. Salvador: Bahia, 2005.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: Uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-208.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

MATTA, A. E. R. Metacognição: Construindo conhecimento sobre a metodologia Design-Based Research e sua utilização na Educação à Distância. **In: Anais ... ABED**, Salvador, v. 16, n. 8, p. 8-16, mai. 2016.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas: Desenvolvimento curricular na educação básica**. Lisboa: IIE, 1998.

RODRIGUES NETO, F. P. **Um estudo sobre a aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais**. 1998. 270 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 1998.

SANTOS, B. de S. **Para um Novo Senso Comum**: a Ciência, o Direito e a Política na Transição Paradigmática. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Pesquisa qualitativa**: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada. 2. ed. Tradução Luciane de Oliveira da Rocha. Porto Alegre: Artmed, 2008.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 17. ed. São Paulo: Cortez, 2003.