

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA  
EXPERIÊNCIA “PIBIDIANA” COM UMA ATIVIDADE DO PISA**

**PROBLEM SOLVING IN MATHEMATICS TEACHING: A "PIBIDIAN"  
EXPERIENCE WITH A PISA ACTIVITY**

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS:  
UNA EXPERIENCIA "PIBIDIANA" CON UNA ACTIVIDAD DEL PISA**

MESQUITA, Milene Nagila  
mmvocal@hotmail.com

Unespar – Universidade Estadual do Paraná  
<http://orcid.org/0000-0002-1256-2727>

BORGES, Fábio Alexandre  
fabioborges.mga@hotmail.com

Unespar – Universidade Estadual do Paraná  
<http://orcid.org/0000-0003-0337-6807>

**RESUMO:** Este relato apresenta a implementação de uma tarefa que teve embasamento teórico na metodologia de Resolução de Problemas. A experiência foi realizada com estudantes de um colégio público da cidade de Campo Mourão, cujo problema aplicado foi selecionado junto à prova do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes e intitulado *A Venda de Jornais*, o qual foi inserido nas atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência de Matemática da Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão. Objetivamos identificar as possíveis contribuições dessa metodologia para o ensino e a aprendizagem da Matemática, assim como as diferentes estratégias de resolução adotadas pelos grupos de estudantes e o desenvolvimento desses durante a atividade. Verificou-se que a atividade proporcionou um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, em que os estudantes participaram ativamente de todas as etapas, demonstrando também maior autonomia.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática. PIBID. PISA. Resolução de Problemas.

**RESUMEN:** Este relato presenta la implementación de una tarea que tuvo una base teórica en la metodología de resolución de problemas. El experimento se realizó con estudiantes de una universidad pública en la ciudad de Campo Mourão, cuyo problema aplicado se seleccionó del examen PISA y se tituló 'La venta de periódicos', que se insertó en las actividades del PIBID, UNESPAR Campo Mourão. Nuestro objetivo es identificar las posibles contribuciones de esta metodología a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como las diferentes estrategias de resolución adoptadas por los grupos de estudiantes y su desarrollo durante la actividad. Se descubrió que la actividad proporcionaba un entorno de aprendizaje dinámico e

interactivo, en el que los estudiantes participaban activamente en todas las etapas, demostrando también una mayor autonomía.

**Palabras clave:** Enseñanza de Matemática. PIBID. PISA. Resolución de problemas.

**ABSTRACT:** This report presents the implementation of an assignment that had a theoretical basis in the methodology of Problem Solving. The experiment was carried out with students from a public school in the city of Campo Mourão, whose problem was selected from the PISA exam and entitled 'The Sale of Newspapers', which was inserted in the activities of the PIBID of Mathematics from UNESPAR in Campo Mourão. We aimed to identify the possible contributions of this methodology to the teaching and learning of Mathematics, as well as the different strategies of resolution adopted by the student groups and their development during the activity. We found that the activity provided a dynamic and interactive learning environment, in which the students actively participated in all stages, demonstrating also greater autonomy.

**Keywords:** Mathematics Teaching. PIBID. PISA. Problem Solving.

## 1 INTRODUÇÃO

Os estudos acerca da Resolução de Problemas (RP) durante a graduação de Licenciatura em Matemática, e que contribuíram para o presente relato de experiência, tiveram início no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), ofertado pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Trata-se de um programa de incentivo e valorização do magistério que oferece bolsas financiadas pela CAPES<sup>1</sup> a alunos de licenciatura, a professores universitários coordenadores do programa e a docentes da Educação Básica (EB) que recebem os licenciandos em suas turmas, os quais buscam aprender mais sobre sua futura profissão e, também, contribuir nos processos de ensino e aprendizagem ao desenvolverem atividades pedagógicas com estudantes da Educação Básica. Esse programa permite aos acadêmicos a oportunidade de estarem no chão da escola, trocando experiências com professores atuantes no ensino, acompanhando e participando da rotina escolar, conhecendo melhor o trabalho da direção, da equipe pedagógica, da secretaria e demais agentes escolares e atuando junto de professores nas salas de aula de escolas públicas da Educação Básica parceiras do programa. Em outras palavras, e de maneira resumida, trata-se de um movimento de diálogo entre conhecimentos

---

<sup>1</sup> A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), fundação do Ministério da Educação (MEC), objetiva a expansão e a consolidação da pós-graduação stricto sensu (mestrado e doutorado) em todos os estados da Federação.

acadêmicos (da universidade) e os profissionais (das escolas), objetivando, acima de tudo, uma formação docente coletiva, compartilhada e cooperativa.

Durante os estudos sobre a RP realizados nos encontros semanais do PIBID, dentre os anos de 2014 e 2017, resolvemos diversos problemas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)<sup>2</sup>, analisamos e dialogamos sobre os conteúdos e os conceitos matemáticos abordados nesses problemas, discutimos as diferentes concepções que se tem sobre a Resolução de Problemas, como as difundidas por autores como Van de Walle (2009), Stanic e Kilpatrick (1989), Onuchic e Allevato (2009, 2011) e sobre possibilidades de trabalho com os estudantes. Nesse sentido, resolvemos aplicar um desses problemas explorados no PIBID no 3º ano do curso Técnico Administrativo, turma que acompanhávamos, semanalmente, em um colégio estadual da cidade de Campo Mourão, no Paraná, por aproximadamente um semestre.

O problema foi selecionado junto à prova do PISA de 2012, adaptado por nós, pibidianos, e nomeado *A Venda De Jornais*. Todo o desenvolvimento da atividade se deu com base na concepção de Resolução de Problemas, como metodologia de ensino proposta por Onuchic e Allevato (2009, 2011), com duração de duas horas/aulas, durante o mês de julho de 2017. Com essa experiência, objetivamos identificar as possíveis contribuições dessa metodologia para o ensino e a aprendizagem da Matemática, tanto para os estudantes quanto para o professor, assim como as diferentes estratégias de resolução adotadas pelos estudantes e o desenvolvimento deles durante a atividade.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os estudos descritos nesse trabalho foram desenvolvidos por meio de um levantamento bibliográfico sobre a estratégia de Resolução de Problemas na Matemática e alguns dos aspectos significativos da sua prática em sala de aula. Quando nos referimos ao ensino e a aprendizagem da matemática, ocorrem algumas

---

<sup>2</sup> Trata-se de uma avaliação internacional que é aplicada a cada 3 anos pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), com o objetivo de comparar o desempenho dos alunos na faixa etária de 15 anos.



distinções entre concepções que se tem, por exemplo acerca do que são os problemas matemáticos, de como se trabalha a resolução desses problemas e qual a finalidade de explorá-los em sala de aula.

Onuchic (2008) enfatiza que o conceito de problema está relacionado a algo que não se sabe, a princípio, qual o caminho para a resolução, nem qual a ferramenta, estratégia ou método que se pode utilizar para isso, mas mesmo não sabendo como resolver, existe o interesse em fazê-lo.

Para Van de Walle (2009), um problema pode ser definido como uma tarefa que não possui uma maneira prescrita e única de se chegar ao resultado, ou seja, não existe apenas um caminho para sua resolução, mas diferentes caminhos que podem ser explorados com os estudantes. Ao longo da história, a RP foi caracterizada de diferentes formas. Stanic e Kilpatrick (1989, p. 12) relatam que o papel da RP nos currículos de Matemática das escolas se caracterizou por três temas gerais: "[...] Resolução de Problemas como contexto, Resolução de Problemas como capacidade e Resolução de Problemas como arte". Dentre esses três papéis, a RP como arte, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), emergiu dos trabalhos do importante matemático George Pólya, pesquisador que contribuiu significativamente para a construção de uma concepção mais profunda da RP, relacionada à arte da descoberta.

Outra abordagem que se destaca é a sugerida por Van de Walle (2009, p. 58), que ressalta que "[...] a matemática deve ser ensinada por meio da Resolução de Problemas". Nessa concepção, entende-se que os problemas assumem um papel de instrumento para se ensinar matemática, os conteúdos e os conceitos matemáticos são abordados de maneira contextualizada, proporcionando aos estudantes uma aprendizagem com maior produção de significado, que faça, portanto, mais sentido para eles.

Onuchic e Allevato (2009, p. 134) apresentam uma proposta para se trabalhar a RP com os estudantes, enfatizando-a como uma metodologia, designada por "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas". Nessa metodologia, as pesquisadoras ressaltam uma forma diferente de realizar a avaliação:

[...] essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação. Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com



vistas a acompanhar o crescimento dos estudantes, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p.138).

Segundo as autoras (2009), nessa proposta, entende-se que é possível que o professor acompanhe o crescimento dos estudantes, continuamente, durante a resolução de problemas, no sentido de que eles tendem a ser estimulados a pensar a partir de contextos, a interpretar esses contextos, a processar corretamente as informações dadas e solicitadas, a discutir com os colegas em busca de estratégias de resolução. Ou seja, trata-se de um crescimento relativo a aquisição de maior autonomia e confiança na resolução de questões matemáticas contextualizadas, sem esperar respostas ou estratégias prontas por parte do professor. Vale destacar, nesse sentido, a possibilidade de o professor identificar conhecimentos falsos ou equivocados que os estudantes podem apresentar acerca de determinados conceitos matemáticos, durante o processo de resolução. Dessa forma, o professor pode intervir e auxiliar os estudantes, de modo que reconstruam esses conhecimentos.

Ensinar por meio de RP exige certa conduta do professor, conforme destaca Van de Walle (2009), principalmente por ser uma metodologia distinta da qual os estudantes estão acostumados. Dessa forma, é indispensável que o professor tenha a convicção de que todos os estudantes são capazes de criar ideias significativas sobre matemática, bem como de adequar sua linguagem em sala de aula, principalmente pelas diferenças existentes entre a linguagem usual e a linguagem matemática.

Para auxiliar no desenvolvimento de trabalhos por meio da RP na sala de aula, diversos pesquisadores sugerem roteiros de atividades para os professores. Um desses roteiros é o sugerido por Onuchic e Allevato (2011), o qual se baseia na:

- 1) Preparação do problema: selecionar um problema visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento;
- 2) Leitura individual: entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura;
- 3) Leitura em conjunto: formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora em grupo. Se houver dificuldade na leitura do texto, o professor pode auxiliar quanto às dúvidas com palavras desconhecidas. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se com os estudantes, consultar



um dicionário;

4) Resolução do problema: compreendido o problema, os estudantes tentam resolvê-lo em equipe de forma cooperativa e colaborativa, de modo a caminhar para a construção de conhecimentos sobre o conteúdo que o professor planejou para aquela aula;

5) Observar e incentivar: nessa etapa, o professor deixa de ser um transmissor de conhecimento, passando para o papel de mediador. Nessa nova conduta, ele passa a observar, analisar o comportamento dos estudantes, estimular o trabalho colaborativo, auxiliá-los a pensar, dando um tempo maior, incentivando a troca de ideias entre eles e abertura para que manifestem seus conhecimentos prévios. O professor deve também estimular os estudantes a escolherem diferentes caminhos (métodos), a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor os auxilie em suas dificuldades, acompanhe suas explorações e ajude-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução (notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias), a fim de possibilitar a continuação do trabalho;

6) Registro das resoluções na lousa: representantes dos grupos vão à lousa para anotar os resultados obtidos, estando eles certos ou errados, registrando os diferentes caminhos utilizados para a resolução, de modo que todos os demais estudantes possam analisar e refletir.

7) Plenária: todos os estudantes discutem as diferentes resoluções, defendem seus pontos de vista e esclarecem suas dúvidas. É um momento fundamental para a aprendizagem;

8) Busca do consenso: após as discussões e sanadas as dúvidas, o professor, juntamente com os estudantes, tenta chegar a um consenso quanto à solução correta;

9) Formalização do conteúdo: são apresentadas pelo professor as devidas operações e procedimentos possíveis para a resolução do problema, padronizando os conceitos e organizando toda estrutura em linguagem matemática adequada.

A partir das concepções apresentadas por Onuchic e Allevato (2011), assim como Van de Walle (2009), é possível destacar alguns dos pontos positivos ao se trabalhar com a RP, tais como: colocar o foco da atenção dos estudantes nas atividades, proporcionar aprendizagem com maior produção de significado sobre os conceitos, o desenvolvimento do raciocínio matemático, autonomia para que investiguem e formulem suas próprias estratégias e conjecturas, torná-los mais confiantes; e por acreditarem que são capazes de fazer matemática.

Em relação ao último ponto positivo citado, há de se considerar que o erro passa a ter outro enfoque, pois ele deixa de ser visto apenas como algo negativo, que não pode ocorrer, passando a ser compreendido como uma das ferramentas que contribuem com a aprendizagem, a depender da conduta docente. Segundo Luckesi (2011), ao olhar para o erro de uma forma não negativa e mais criteriosa, há a possibilidade de o professor utilizá-lo de uma forma construtiva para a aprendizagem. Afinal de contas, nem todo acerto representa compreensão e, da mesma forma, nem toda resolução com resposta final não adequada pode ser totalmente descartada.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O problema aplicado, intitulado *A Venda De Jornais*, foi selecionado dentre os problemas do PISA, de 2012, e adaptado por nós, pibidianos. Antes da implementação desse problema, primeiramente, foram resolvidos e discutidos diversos problemas do PISA 2012, durante os encontros semanais do PIBID, juntamente com os demais bolsistas e professores coordenadores do programa. Após a seleção do problema pela nossa equipe e a reflexão realizada com o professor regente da turma, foi feita uma análise dos conteúdos matemáticos abordados no mesmo e, a partir dessa análise, optamos por acrescentar duas questões envolvendo a generalização matemática, uma característica algébrica, não presente no problema original. Tal iniciativa de acréscimo se justifica pelo fato de o público escolhido já haver estudado álgebra em séries anteriores.

A aplicação desse problema se deu em uma turma do 3º ano do curso Técnico Administrativo de um colégio público de Educação Básica, situado na cidade de Campo Mourão, Paraná, parceiro no PIBID de Matemática da Unespar Campo

Mourão. A atividade foi realizada com 19 estudantes durante duas horas/aulas, no mesmo turno em que os estudantes frequentavam as aulas, no dia 05 de julho de 2017.

Para a implementação do problema, dividimos a turma em 4 (quatro) grupos. Para preservar a identidade dos estudantes, indicaremos os grupos por A, B, C e D, sendo o grupo A composto por quatro estudantes e os grupos B, C e D compostos por cinco estudantes. Primeiramente, foi realizada uma leitura coletiva com os estudantes e, em seguida, pedimos para que eles lessem o problema novamente, agora em seus grupos, para que na sequência, discutissem e resolvessem as questões do problema coletivamente.

Durante a resolução, nós os auxiliamos em algumas dúvidas, o mais imparcialmente possível para não influenciar em suas estratégias de resolução e em suas respostas. Nesse momento, conforme a sugestão de Onuchic e Allevatto (2008), desempenhamos o papel de mediadores, observando, incentivando e orientando os estudantes a investigarem, de modo que construíssem suas próprias estratégias pertinentes à resolução.

Ressaltamos que essa mediação nos demandou muita cautela para que não entregássemos aos alunos respostas prontas ou sugestões que os impedissem de desenvolver o seu próprio raciocínio, tal qual necessário para solucionarem o problema proposto. E essa não foi uma tarefa muito fácil, pois, a todo o momento da resolução, os alunos ficavam nos perguntando se o que estavam fazendo estava certo ou se a resposta estava correta, mas, nós sempre respondíamos as perguntas com novos questionamentos para fazê-los pensar quanto ao que estavam resolvendo.

Nesse caso, salientamos que o destaque vai para a compreensão do problema e não para os algoritmos matemáticos, que por vezes, intimidam compreensões por parte dos estudantes. Após o término das resoluções, realizamos uma plenária na qual todos os grupos apresentaram, no quadro, as estratégias de resolução utilizadas para cada questão e as respectivas respostas alcançadas. Esse momento nos chamou a atenção por ver que, apesar de inicialmente os estudantes demonstrarem certa timidez pela exposição em frente à turma, foram até a lousa e buscaram convencer uns aos outros de que suas respostas e formas de pensar estavam adequadas. Quando os alunos discordavam da resolução de algum grupo, nós



pedíamos para que eles tentassem justificar o porquê de estar inadequada ou incompleta a resolução. Percebemos que esse momento demorou mais tempo do que imaginávamos, por conta dessa interação entre eles.

No momento da plenária, utilizamos um gravador de áudio posicionado na mesa do professor regente, para capturar, em detalhes, as explicações dos estudantes acerca de suas estratégias de resolução. Portanto, como instrumento de coleta de dados, utilizamos os registros das resoluções dos estudantes de cada grupo, a transcrição do áudio capturado na plenária e as anotações feitas em diário de campo, a partir das observações realizadas. Para apresentar os resultados, selecionamos algumas resoluções de acordo com suas contribuições. Como critério para a coleta de dados, consideramos as diferentes estratégias de resolução.

Vale ressaltar que, durante a aplicação, permitimos que os estudantes realizassem os cálculos com o auxílio da calculadora, pois, nosso objetivo era analisar as diferentes estratégias de resolução que podem ser utilizadas para resolver o problema. Outro ponto a se destacar é que o professor regente da turma ainda não havia vivenciado qualquer tipo de contato com a RP. Conseqüentemente, a aplicação da atividade configurou-se, também, como um importante momento de formação docente compartilhada, tanto inicial quanto continuada. Alguns estudantes também não haviam tido contato com essa dinâmica de aula. Assim, realizamos uma breve investigação com os grupos, a partir da qual foi possível identificar que, dos 19 estudantes participantes, apenas dois não haviam vivenciado atividades de RP. Acreditamos que o grande número de estudantes que já haviam vivenciado tal estratégia, se deve ao fato de que a parceria do PIBID com o colégio permitiu outras situações semelhantes, já que a temática RP foi selecionada pelo referido projeto para o ano de 2017.

#### **4 ANÁLISE DOS DADOS**

Como um primeiro aspecto de nossa análise, pudemos constatar que os grupos compostos por estudantes que já haviam vivenciado atividades do gênero obtiveram maior facilidade em resolver as questões do problema em relação aos demais. Acreditamos que isso tenha ocorrido, porque a dinâmica diferente de aula não causou

tanto desconforto a esses estudantes que já conheciam a forma de abordagem da tarefa.

Aqueles que estavam vivenciando a experiência pela primeira vez nos pareceram mais acanhados e com receio de fazerem algo de errado na resolução, não conseguindo chegar a uma resposta adequada, ou, então, por não estarem habituados à leitura e à interpretação de problemas contextualizados, ficaram desestabilizados, não conseguindo iniciar a resolução de algumas questões do problema, ainda que nós tenhamos esclarecido a todos que iríamos olhar para as estratégias e a forma de pensar dos grupos para discutirmos juntos depois, e não exclusivamente para a resposta final. Assim, os grupos C e D tiveram maior facilidade em comparação aos grupos A e B, conforme podemos verificar no subtítulo Análise dos Dados.

Para resolver o problema, os estudantes tiveram que analisar e interpretar o seguinte contexto, anteriormente às questões a serem resolvidas, conforme a figura 1, a seguir:

Figura 1 - Contexto do problema adaptado para a aplicação

**A VENDA DE JORNAIS - Adaptado**

Em Zedlândia, existem dois jornais que tentam recrutar vendedores. Os anúncios abaixo mostram como eles pagam seus vendedores.

<p style="text-align: center;"><b>ESTRELA DE ZEDLÂNDIA</b></p> <p style="text-align: center;"><b>PRECISA DE DINHEIRO EXTRA?</b></p> <p style="text-align: center;"><b>VENDA NOSSO JORNAL</b></p> <p>Você será pago: 0,20 zeds por jornal para os primeiros 240 jornais que você vender na semana, mais 0,40 zeds para cada jornal adicional vendido.</p>	<p style="text-align: center;"><b>DIÁRIO DE ZEDLÂNDIA</b></p> <p style="text-align: center;"><b>MUITO DINHEIRO</b></p> <p style="text-align: center;"><b>POUCO TEMPO!</b></p> <p>Venda o <i>Diário de Zedlândia</i> e ganhe 60 zeds por semana, mais um adicional de 0,05 zeds por jornal que você vender.</p>
--	--

Fonte: Problema adaptado do PISA de 2012, 2017.

Ao realizarem a leitura do problema, surgiu uma dúvida comum a todos os estudantes em relação ao termo *zeds*, que se refere à unidade monetária adotada no contexto. Nesse momento, esclarecemos que esse termo foi adotado pelo PISA como sendo uma unidade monetária universal, como, por exemplo, o real, o dólar, o euro,

entre outras moedas adotadas em diferentes países, considerando que o PISA é um processo de avaliação internacional.

Figura 2 - Letra (a) da questão 1 do problema aplicado

**Questão 1: A VENDA DE JORNAIS**

- a) Em média, Frederico vende 350 cópias do *Estrela de Zedlândia* toda semana. Quanto ele ganha por semana, em média?

Fonte: Problema adaptado do PISA de 2012, 2017.

Para resolver a letra (a) da questão 1, todos os grupos utilizaram a mesma estratégia. Inicialmente, calcularam a diferença entre a quantidade total de jornais vendidos na semana, que foi de 350 jornais, e a quantidade máxima de jornais vendidos ao valor de 0,20 zeds por unidade, que foi de 240 jornais. Assim, encontraram a quantidade de 110 jornais vendidos, além dos 240. Posteriormente, multiplicaram os 240 jornais por 0,20 zeds, encontrando um valor ganho de 48 zeds e multiplicaram os 110 jornais por 0,40 zeds, encontrando mais um valor ganho de 44 zeds. Assim, somaram as duas parcelas de lucro e chegaram à resposta esperada de 92 zeds, que Frederico ganhou na semana, pela venda de 350 jornais. Podemos verificar, no Quadro 1, os registros das resoluções de cada grupo:

Quadro 1 - Resoluções dos grupos A, B, C e D referente à letra (a) da questão 1



Grupo A	$\begin{array}{r} 1a) \quad 350 \\ - 240 \\ \hline 110 \end{array} \quad \begin{array}{r} 240 \\ \times 0,20 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 110 \\ \times 0,40 \\ \hline 44 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ + 44 \\ \hline 92 \end{array}$
Grupo B	$\begin{array}{r} 1.a) \quad 0,20 - 240 = 48 \\ 0,40 - 110 = 44 \\ \hline 92 \end{array}$
Grupo C	$\begin{array}{r} 350 \\ - 240 \\ \hline 110 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 0,20 \rightarrow 48,00 \\ \times 0,40 \rightarrow 44,00 \\ \hline 92,00 \text{ zeds} \end{array}$
Grupo D	$\begin{array}{r} 240 \times 0,20 = 48 \text{ zeds} \\ 110 \times 0,40 = 44 \text{ zeds} \\ \hline 92 \text{ zeds} \end{array}$ <p> <math>350 \rightarrow n^{\circ} \text{ de jornais vendidos}</math>  <math>- 240 \rightarrow n^{\circ} \text{ de jornais a } 0,20 \text{ zeds}</math>  <math>110 \rightarrow \text{jornais adicionais}</math>  <math>\times 0,4 \rightarrow \text{lucro por adicionais}</math>  <math>44 \text{ zeds} \rightarrow \text{lucro total dos adicionais}</math>  <math>92 \text{ zeds} \rightarrow \text{lucro total}</math> </p>

Fonte: Registros dos estudantes, 2017.

Nessa questão, os estudantes não tiveram dificuldades e apresentaram uma resolução coerente e que correspondeu ao esperado. No entanto, percebemos que os grupos B e C organizaram os algoritmos matemáticos sem uma separação entre aqueles que exigiam diferentes operações, o que pode deixar a resolução um tanto confusa. Entretanto, isso não interferiu na resposta final, pois eles pensaram corretamente. Apesar de não termos questionado esses estudantes quanto à forma de organização dos algoritmos, devido às experiências vivenciadas em outras turmas, pode-se inferir que eles resolveram a questão desse modo por uma questão de tempo, resolvendo suas contas com maior agilidade.

Para resolver a letra (b) da questão 1, elaborada por nós durante os encontros de estudo na universidade, os grupos C e D apresentaram raciocínios parecidos. A Figura 3 apresenta o enunciado da letra (b) da questão 1..

Figura 3: Letra (b) da questão 1 adaptada pelos pibidianos

b) E se nós soubermos que um outro vendedor ganhou 136 zeds em uma semana, vendendo também jornais do *Estrela de Zedlândia*, como descobrimos a quantidade de cópias que ele vendeu nessa semana? Explique seu raciocínio. Qual é essa quantidade de cópias?

Fonte: Questão elaborada pelos pibidianos, 2017.

O grupo C calculou a diferença entre o total ganho por esse outro vendedor na semana, que foi de 136 zeds, e o total ganho por Frederico, que foi de 92 zeds, ganho

que calcularam na questão anterior, referente à venda de 350 unidades de jornal. Dessa diferença, encontraram o valor de 44 zeds, o qual dividiram por 0,40 zeds e descobriram que foram vendidas mais 110 unidades do jornal do *Estrela de Zedlândia*. Em seguida, eles somaram as duas quantidades de jornais vendidos e chegaram à resposta esperada. Por fim, eles procederam com a *prova real* para fazer a verificação da resposta encontrada.

Figura 4 - Resolução da letra (b) da questão 1 pelo grupo C

$350 - 136 \text{ zeds} = 92 \text{ zeds}$   
 $44 \text{ zeds (falta)} \div 0,40 \text{ zeds (cada)} = 110 \text{ cópias}$   
 $+ 350 \text{ cópias} = 460 \text{ cópias}$

$460 \text{ cópias}$ $- 240 \times 0,20 = 48 \text{ zeds}$ $+ 220 \times 0,40 = 88 \text{ zeds}$ <hr/> $136 \text{ zeds}$	$= 48 \text{ zeds}$ $+ 88 \text{ zeds}$ <hr/> $136 \text{ zeds}$
--	--

Fonte: Registros dos estudantes, 2017.

O grupo D utilizou o mesmo raciocínio do C, porém, subtraiu, do lucro total de 136 zeds, o lucro de 48 zeds pela venda de 240 unidades de jornal, encontrando o valor de 88 zeds, referente aos jornais adicionais vendidos. Em seguida, dividiram os 88 zeds por 0,40 zeds e chegaram a um número de 220 jornais adicionais vendidos. Por fim, eles somaram as duas quantidades de jornais vendidos, assim como fez o grupo C.

Figura 5: Resolução da letra (b) da questão 1 pelo grupo D

$136 \rightarrow \text{lucro total}$   
 $- 48 \rightarrow \text{lucro por } 240 \text{ jornais iniciais}$   
 $88 \rightarrow \text{lucro por jornais adicionais}$

$88 : 0,4 = 220 \rightarrow \text{jornais adicionais}$   
 $+ 240 \rightarrow \text{jornais iniciais}$   
 $460 \rightarrow \text{jornais totais}$

Fonte: Registros dos estudantes, 2017.

Já os grupos A e B não apresentaram resoluções tão detalhadas em comparação aos grupos C e D. O grupo B pensou, inicialmente, igual ao grupo D. Os



estudantes calcularam a diferença entre os lucros de 136 *zeds* e 48 *zeds* e encontraram um valor de 88 *zeds*. Porém, eles observaram, na resposta da letra (a), que o vendedor Frederico ganhou 44 *zeds* pela venda de 110 unidades de jornal, portanto, para ganhar 88 *zeds*, que é o dobro de 44, o outro vendedor deveria vender também o dobro de jornais, ou seja, 220. Essa percepção dos estudantes foi pertinente, pois, os levou a diminuir alguns passos que, possivelmente, seriam tomados no processo de cálculo. Na Figura 6, percebemos que o grupo não concluiu a resolução, porém, na folha de resposta, eles preencheram a resposta final corretamente.

Figura 6 - Resolução da letra (b) da questão 1 pelo grupo B

Fonte: Registros dos estudantes, 2017.

O grupo A não apresentou todos os cálculos. Por exemplo, para encontrar a quantidade de 220 jornais adicionais vendidos, não ficou explícita na resolução do grupo a forma como chegaram a esse valor. Mas o grupo, assim como os outros, também chegou à resposta esperada.

A Figura 7 apresenta o enunciado da letra (c) da questão 1, também acrescentada por nós. A questão trata de uma relação matemática que conduz os estudantes ao desenvolvimento da generalização matemática, ou seja, com elementos algébricos.

Figura 7: Letra (c) da questão 1 adaptada pelos pibidianos

c) Podemos perceber que existe uma relação entre a renda semanal e o número de cópias vendidas, sendo que a renda semanal depende do número de jornais vendidos. Sabendo da existência dessa relação, e sabendo que Frederico vende mais de 240 cópias do *Estrela de Zedlândia*, tente encontrar a relação matemática que pode nos fornecer a renda semanal, levando em conta o número de cópias vendidas.

Fonte: Questão elaborada pelos pibidianos, 2017.

Os grupos A e B não apresentaram nenhum registro de resolução no item (c) da questão 1 para se estabelecer a relação matemática solicitada. Já os grupos C e D chegaram a expressões matemáticas bem distintas, um por igualdade e outro por



desigualdade.

Figura 8: Resolução da letra (c) da questão 1 pelo grupo C

c)  $n \cdot y = 240 \cdot x$   
 $x = 0,20$   
 $y = 0,40$   
 $n = \text{quantidade de cópias}$

Fonte: Registro dos estudantes, 2017.

O grupo C constatou que a relação matemática seria uma função do primeiro grau, em que, ao variar a quantidade de cópias  $n$ , conforme denotaram na resolução, determina-se a renda semanal. As letras  $x$  e  $y$ , usadas pelos estudantes na expressão, não são variáveis, mas constantes, que o grupo C interpretou corretamente a partir do enunciado do problema. O raciocínio do grupo foi coerente e percebe-se que eles compreenderam o que fizeram.

Figura 9: Resolução da letra (c) da questão 1 pelo grupo D

c)  $n_j = \text{nº de jornais}$        $R_s = \text{Renda semanal}$   
 Se  $n_j < 240 \Rightarrow R_s = n_j \cdot 0,2 \checkmark$   
 Se  $n_j > 240 \Rightarrow R_s = (n_j - 240) \cdot 0,4 + 48 \checkmark$

Fonte: Registro dos estudantes, 2017.

O grupo D apresentou o modo de encontrar a renda semanal com a venda dos jornais por meio de duas relações matemáticas, que contém expressões do primeiro grau e delimitaram o intervalo de variação do número de jornais vendidos para cada uma delas. Ou seja, em uma das relações delimitaram que se o número de jornais vendidos na semana for menor que 240, isso implica que a renda semanal será o número de jornais multiplicado por 0,20 zeds. Na outra relação, estipularam que se o número de jornais vendidos for maior que 240, devemos multiplicar a diferença a mais de jornais vendidos por 0,40 zeds e somar com os 48 zeds ganhos pela venda dos primeiros 240. Verificou-se, nessa resolução, que as condições impostas para ambas as relações matemáticas não incluíram a quantidade igual a 240, pois as condições indicam quantidades maiores ou menores apenas.

A questão 2 do problema apresenta a mesma estrutura da letra (b) da questão



1, porém, ela se refere à venda dos jornais do *Diário de Zedlândia*.

Figura 10 - Questão 2 do problema aplicado

**Questão 2: A VENDA DE JORNAIS**

Cristina vende o *Diário de Zedlândia*. Em uma semana ela ganhou 74 zeds. Quantos jornais ela vendeu naquela semana?

Fonte: Problema do PISA de 2012, 2017.

Na resolução dessa questão, os grupos A, B e D apresentaram o mesmo raciocínio. Eles subtraíram os 60 zeds – que é um ganho fixo semanal que independe da quantidade de jornais vendidos - do valor total ganho por Cristina na semana, que era de 74 zeds. Dessa diferença, encontraram como ganho adicional, na semana, o valor de 14 zeds e, em seguida, dividiram esse valor por 0,05 zeds, que é o valor unitário do jornal, encontrando, desse modo, a quantidade de 280 jornais vendidos por Cristina na semana.

Quadro 2 - Resoluções dos grupos A, B e D referente a questão 2

Grupo A	$\begin{array}{r} 2) \quad -60 \\ \quad -74 \\ \hline \quad 14 \end{array} \quad 14 \div 0,05 = 280 \text{ jornais}$
Grupo B	$\begin{array}{r} 2. \quad 1. \quad 14 \quad 74 \\ \quad \quad \quad -60 \\ \hline \quad \quad \quad 14 \quad 0,05 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 280 \end{array}$
Grupo D	<p>74 → Rs - 60 → inicial ----- 14 → crédito por unidade de jornal</p> <p>14 : 0,05 = 280 → 280 jornais # por jornal adicional</p>

Fonte: Registros dos estudantes, 2017.

Assim como observado na resolução da questão 1, o grupo B organizou os algoritmos matemáticos sem separar aqueles de diferentes operações. Já o grupo A subtraiu 74 de 60, quando deveria ter feito ao contrário. Isso nos leva a pensar que esses estudantes, talvez, tenham feito dessa forma por terem dificuldade em operar os algoritmos devido ao uso rotineiro da calculadora. Mas, sem se prender aos algoritmos matemáticos, uma vez que eles compreendem o que precisam fazer para solucionar a questão, eles também conseguem resolver de maneira mais informal,





maneira essa dita informal do ponto de vista do rigor matemático exigido comumente pelos professores nas escolas.

O grupo C cometeu um equívoco e não acertou a questão 2. Eles iniciaram a resolução corretamente, com o mesmo raciocínio dos grupos A, B e D, porém, depois de encontrar a quantidade de 280 jornais vendidos na semana, o grupo somou a essa quantidade encontrada os 60 *zeds* que Cristina ganhou como fixo, o que não está correto, pois esse valor se refere a outra grandeza (jornais e *zeds* não podem ser somados).

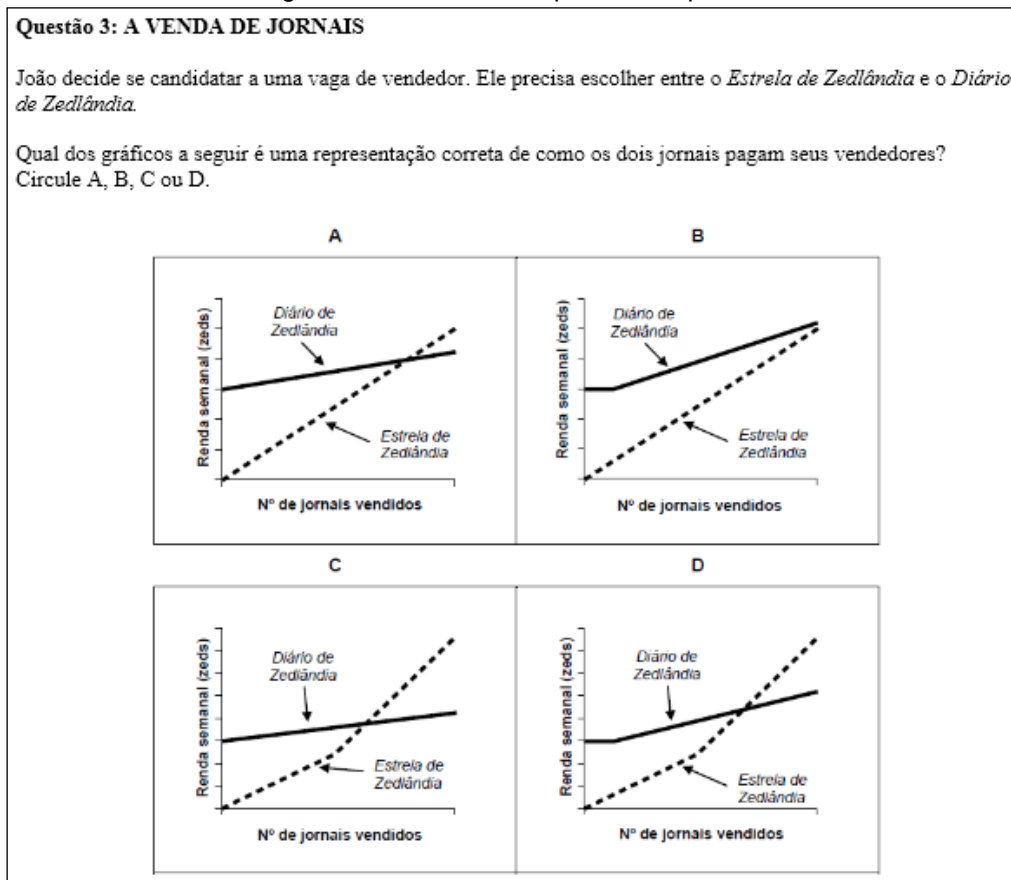
Figura 11: Resolução da questão 2 pelo grupo C

$$\begin{array}{r}
 2 - 74 \\
 - 60 \\
 \hline
 14 \div 0,5 = 280 \\
 + 60 \\
 \hline
 340
 \end{array}$$

Fonte: Registros dos estudantes, 2017.

No exercício 3, os grupos B, C e D apresentaram raciocínios bem parecidos. Já no grupo A, os estudantes marcaram um gráfico que não representava corretamente o enunciado. Após verificarem que os grupos B, C e D marcaram outra opção, acabaram apagando e colocando a mesma alternativa que os demais, ficando, assim, todos com a mesma resposta. Como era um exercício de marcar a alternativa correta e utilizar interpretação gráfica, não obtivemos muitos registros por parte dos estudantes, que não a própria opção escolhida.

Figura 12: Questão 3 do problema aplicado

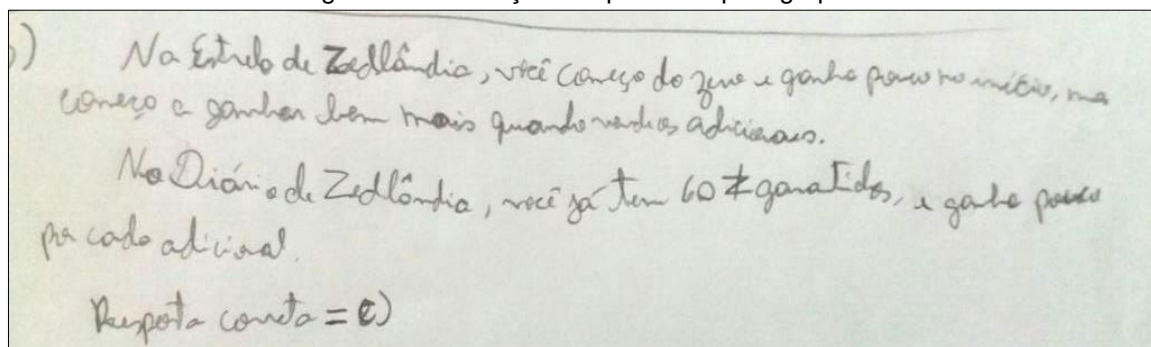


Fonte: Problema do PISA de 2012, 2017.

Transcrevendo o áudio, podemos perceber que os grupos B, C e D conseguiram fazer a interpretação gráfica corretamente e marcaram o item (c) como sendo o melhor gráfico que representa o enunciado, enquanto que o grupo A marcou o item (a). Durante a plenária, o grupo A acabou convencido de que o gráfico que melhor representa o problema seria o apresentado no item (c), a partir das justificativas que os colegas dos grupos B, C e D apresentaram, conforme podemos verificar na Figura 13:



Figura 13: Resolução da questão 2 pelo grupo C



Fonte: Registros dos estudantes, 2017.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na implementação dessa atividade, por meio da metodologia de RP, verificamos que durante todo o desenvolvimento da atividade houve interesse, empenho, discussão e interação entre os estudantes dentro dos seus grupos, os quais realmente quiseram buscar soluções para as questões do problema. Em outras palavras, eles assumiram a tarefa como sua e inseriram-se no processo de ensino e aprendizagem de maneira ativa. A atividade proporcionou um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e interativo, em que os estudantes tiveram maior autonomia para buscar suas próprias estratégias de resolução. Isso se evidencia, pois surgiram resoluções por caminhos distintos, ou seja, os estudantes resolveram as atividades da forma que acharam mais coerente e conveniente com o seu próprio repertório de conhecimentos.

Além disso, consideramos que o momento da plenária foi muito produtivo, ao observar que alguns estudantes se preocuparam em validar suas respostas e ao tentarem convencer os colegas de que suas resoluções estavam corretas. Além disso, houve a preocupação dos colegas em buscar compreender como o outro grupo pensou e se realmente o caminho que eles escolheram os levou a uma resposta coerente. Dessa forma, todos concordaram que não há apenas uma maneira de resolver um problema.

A nossa mediação, durante a plenária, ocorreu no sentido de coordenar as discussões entre os estudantes, fazer questionamentos para levá-los a perceber o que poderia estar errado, incoerente ou incompleto nas resoluções e formalizar os

conteúdos e os conceitos matemáticos envolvidos. Antes mesmo de os colegas que estavam ao quadro explicarem a sua resolução, os demais já faziam perguntas questionando o porquê de terem iniciado a resolução de forma diferente, pois achavam a sua estratégia mais fácil, ou mais correta, como alguns diziam. Além disso, os que estavam assistindo já apontavam que tinha algo incoerente ou errado, na visão deles, e logo nos questionavam se estavam certos. Nessas situações, tentamos direcionar perguntas que fizessem eles mesmos concluir se a resolução em discussão estava certa ou não, se ela levava a uma solução coerente, e alguns, mesmo convictos que sim, mostravam a necessidade de ter a nossa confirmação.

Quanto à formalização dos conteúdos e dos conceitos matemáticos, definimos realizar essa etapa ao final da plenária, quando todos os grupos já tivessem apresentado, pelo fato de qualquer formalização após a apresentação de cada grupo poder interferir na resolução dos próximos a apresentarem. No entanto, como a plenária demorou um tempo maior do que o previsto, acabamos não conseguindo explorar esse momento como planejamos.

Chamou-nos a atenção a forma como alguns estudantes organizaram os algoritmos matemáticos, marcando setas e aproveitando os mesmos algoritmos de um algoritmo em outro de outra operação. Para nós isso pareceu meio desordenado, confuso, porém, foi a forma de organização deles, que para eles estava certa e funcionou. Nesse sentido, entendemos que o contexto e a discussão acerca do problema foram mais significativos que as regras prévias dos algoritmos. Por exemplo, muitos estudantes erram seus cálculos em determinadas atividades matemáticas, chegando a resultados negativos para um valor que representa uma medida de distância (o que não existe), porém, não perceberam o erro, já que a atenção se volta mais para o algoritmo, em detrimento do contexto, da compreensão.

Acreditamos que a metodologia também pode contribuir para que o professor identifique conhecimentos equivocados dos estudantes, para que ele possa explorar esses equívocos, fazendo com que os estudantes reconstruam esses conhecimentos de forma correta e válida. Corroborando o que salienta Luckesi (2011), a respeito do erro, consideramos que, ao olhar para os erros dos estudantes de maneira construtiva, o professor pode auxiliá-los para que quebrem o bloqueio que eles têm e desconstruam aos poucos a noção do erro como algo indesejável, que não pode

ocorrer. Notamos que os estudantes, em nossa experiência de sala de aula, relatam uma espécie de bloqueio com atividades matemáticas, relacionado ao medo do *errar*. Chamamos de bloqueio, justamente, pois quando os estudantes não conseguem desenvolver a resolução de um problema, por exemplo, pode ser que isso aconteça devido ao medo que eles têm de errar.

Mudando a forma de encarar o erro, talvez os estudantes se sintam mais confiantes para tentar resolver aquilo que lhes é proposto e podem, também, desenvolver melhor a criatividade ao arriscar e ao tentar buscar caminhos diferentes para resolver a atividade. Além disso, quando um estudante resolve uma tarefa de determinada maneira que não o leva à solução correta, quando o professor faz a correção no quadro e justifica o motivo da solução não estar certa, o estudante tende a compreender aquilo que está estudando de forma mais significativa.

Consideramos que essa experiência possibilitou conhecermos melhor sobre nossa futura atuação como docentes, a antecipar e administrar melhor nossas ansiedades ao estar na escola, na sala de aula frente aos desafios que enfrentaremos ao desenvolver atividades escolhidas e planejada por nós, e que compreendem nossas expectativas quanto à realização de um trabalho que contribua significativamente para a aprendizagem dos estudantes.

### **MILENE NAGILA MESQUITA**

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná, *Campus* de Campo Mourão. Foi bolsista CAPES do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência/PIBID. Atualmente é docente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, *Campus* de Campo Mourão.

### **FÁBIO ALEXANDRE BORGES**

Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá, com estágio de pós-doutoramento pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade de Londrina. Docente do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e do Mestrado em Ensino: Formação Docente Interdisciplinar, ambos da Universidade Estadual do Paraná.

### **REFERÊNCIAS**

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. In: *Boletim GEPEM - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática*. Rio de Janeiro, v. 55, p. 133-154, 2009.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR – CAPES. *Portal de Informações da Capes*. Disponível em:

<http://www.capes.gov.br/acessoainformacao/perguntas-frequentes/sobre-a-capes/7473-sobre-a-capes>. Acesso em: 06 de jan. 2018.

LUCKESI, C. C. Prática Escolar: do Erro Como Fonte de Castigo ao Erro Como Fonte de Virtude. In: LUCKESI, C. C. *Avaliação da Aprendizagem Escolar: estudos e proposições*. 22. Ed. São Paulo: Cortez, 2011, p. 189-200.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (2003). *Letramento em leitura, matemática e ciência*. Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), Ministério da Educação e do Desporto, Brasília-DF. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/pisa>. Acesso em: 05 de jan. 2018.

ONUCHIC, L. R. *Uma história da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo*. Unesp - Rio Claro. ISERP - Palestra de Encerramento, 2008. 1 CD-ROM.  
ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. v. 25, n. 41, Rio Claro: *Bolema*, Dezembro 2011.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Perspectivas históricas da Resolução de Problemas no currículo de matemática. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). *The teaching and assessment of mathematical problem solving*. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.

VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

*Recebido em: 02/12/2019*

*Aprovado em: 26/05/2020*