ATOS DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO – PPGE/ME FURB
ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO UNA NUEVA DISCIPLINA[1]

RUIZ, Angel – Universidad de Costa Rica y Universidad Nacional
angelruizz@racsa.co.cr

Resumen:

Desde una perspectiva global, se trata de examinar la Educación Matemática dentro del escenario histórico que vivimos, sus etapas recientes de evolución, las principales tendencias actuales en sus componentes teóricos, en la búsqueda de una fundamentación como profesión y como disciplina científica. A partir de ese examen analítico, se intenta trazar los principales elementos teóricos e históricos que permitan tener una perspectiva general de su desarrollo en los próximos años.

Palabras clave: Educación Matemática, Historia de la Educación Matemática, Didáctica de las Matemáticas, Matemáticas.

Abstract:

MATHEMATICAL EDUCATION LIKE A NEW DISCIPLINE

We examine Mathematics Education in the current historical scenario, its recent stages of development and the main theoretical trends we identify it has; a special emphasis is given to the theoretical foundations of this a new academic and scientific discipline. From this analytical exercise we will outline the most important historical and theoretical characteristics of this discipline for the years to come.

Key-Words: Mathematical Education, History of the Mathematical Education, Didactic of the Mathematics, Mathematics.

1. INTRODUCCIÓN

La Educación Matemática es una profesión relativamente nueva y, en especial, su status como disciplina científica y académica se encuentra en un proceso de definición, construcción y consolidación. En perspectiva, son muchas las variables que influyen sobre un cuerpo teórico y práctico dotado de tanta complejidad; en la Educación Matemática participan elementos sociales, institucionales, psicológicos, etc. Su incidencia en los procesos educativos la coloca en relación estrecha con múltiples dimensiones de la sociedad; en algunos casos, como factor relevante activo en los sistemas educativos y científicos de la sociedad. Y, a la vez, las grandes líneas de desarrollo social e histórico penetran y condicionan la evolución interna de la misma disciplina. ¿Cómo hacer una radiografía de lo que han sido los últimos

[1] Se agradece la colaboración en este artículo de Jesennia Chavarría, académica de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica.

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

años de esta disciplina y también trazar sus perspectivas más amplias? Nos parece apropiado empezar por la historia. Esto nos brindará un contexto preciso en el cual se puede interpretar las principales características de la Educación Matemática en la segunda mitad del siglo XX hasta nuestros días.

Buena parte del escenario que vivimos en la Educación Matemática de hoy es producto del impacto que tuvo la famosa Reforma de las Matemáticas Modernas realizada entre los años 1950 a 1970 en varias partes del mundo.

Como hemos afirmado recientemente:

"La reforma nació como una posible solución de un problema importante para la Educación Matemática: cerrar la distancia entre la práctica matemática de los investigadores profesionales universitarios y la matemática en la primaria y la secundaria. Por medio del lenguaje de conjuntos y con recursos tomados de las nuevas matemáticas quisieron integrar las matemáticas como una sola disciplina: el paso de las matemáticas a la matemática. La reforma se inició en Europa (especialmente Francia) y los Estados Unidos; luego se extendería a América Latina y a otras latitudes. Fueron los textos y los cambios curriculares los principales mecanismos para empujar la reforma." (Ruiz, 2000)

¿Cuál era la idea central de esa reforma?

"Este movimiento internacional por la implantación de nuevas matemáticas quería enseñarlas como una disciplina integrada por conceptos unificadores de los conjuntos, relaciones, funciones y operaciones, las estructuras fundamentales de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial, y con la rigurosidad del llamado método "axiomático". Otras propuestas eran: adoptar el simbolismo moderno, dar mayor importancia al empleo de gráficas, la eliminación de gran parte del álgebra tradicional; algo sumamente grave: la modificación y prácticamente eliminación de la geometría euclidiana tradicional. Un famoso grito de guerra de los reformadores fue: 'Abajo Euclides'." (Ruiz, 2000)

Una de las consecuencias más palpables de la reforma fue la debilidad que se provocó en la enseñanza de la geometría, disciplina que abastecía a las clases de matemáticas con problemas sencillos capaces de provocar interés, placer, contacto con la realidad física.

La reforma fracasó en sus objetivos iniciales y fue rechazada tanto por los educadores, los estudiantes como, incluso, los mismos padres de familia. Sin embargo, las acciones e ideas que esta reforma potenció fueron dominantes durante alrededor de treinta años. No obstante, siempre hubo críticos de mucho relieve intelectual (por ejemplo, Kline y Freudenthal). A principios de los años 80, en la mayoría de países desarrollados se buscó nuevos derroteros para la Educación Matemática. Esto no quiere decir, por supuesto, que estas ideas no sigan

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

teniendo influencia en la comunidad internacional de educadores de la matemática, con mayor impacto en unos países que en otros.

Algunas de estas implicaciones que nos interesa subrayar aquí es que, más bien como reacción, la reforma a la larga provocó algunos resultados sociales y profesionales relevantes: por un lado, se potenció una profesionalización de la comunidad de educadores matemáticos, definiendo características, organización, reunión y fronteras para la práctica de la educación (como afirmación frente y a veces contra los matemáticos que fueron los grandes conductores de la reforma); y, por otra parte, como rechazo a las posiciones dominantes en la reforma, la búsqueda de nuevas ideas que fundamentaran la nueva disciplina tanto desde la pedagogía como de la epistemología.

Hay que reconocer, sin embargo, que hubo siempre desarrollos teóricos paralelos a la reforma, incluso antagónicos, que desde diferentes ópticas crearon teorías y aproximaciones epistemológicas, didácticas específicas. Como es el caso de la fenomenología de Freudenthal o las ideas de Brousseau.

Tampoco, debe decirse, los países vivieron la reforma y la reacción a la misma en iguales términos. Eso significa, en particular, que existe una diversidad de desarrollos teóricos y profesionales en la Educación Matemática que, a veces, se ven influenciados por contextos nacionales, regionales, culturales. No era igual la situación para aquellos académicos que se encontraban subordinados en facultades de educación o de ciencias sociales en general, que la de aquellos dentro de departamentos de matemática. Las diferencias en las tradiciones culturales también han sido significativas. Por ejemplo, la historia de la filosofía francesa sobre las matemáticas que, para no ir más lejos, se nutre privilegiadamente de pensadores como Poincaré, Brunschvicg, Bachelard que estuvieron preocupados por los problemas de la filosofía de la ciencia y la matemática desde una aproximación específica que pesa en muchos trabajos (por ejemplo en los de la *Didactique des Mathématiques*). De igual manera, debe resaltarse la influencia de la filosofía neopositivista en el mundo anglosajón hacia cierto tipo de experiencias y métodos. También la organización social pesa, como en el caso de los Estados Unidos con la ausencia de un sistema centralizado en la educación, o en Francia un sistema estatal muy centralizado. El peso de tradiciones culturales y la organización de la vida social se aprecia con fuerza en las características de la Educación Matemática en el Lejano Oriente (por ejemplo, en la dinámica de las lecciones). Estas condiciones provocan diferencias.

Para ofrecer una radiografía de la situación de la Educación Matemática en el planeta nos parece lo más apropiado señalar tres dimensiones centrales (aunque distintas en su

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

carácter): el escenario histórico y social que vivimos, el progreso de nuevas ideas sobre las matemáticas, y la construcción de la Educación Matemática como una nueva profesión y como una nueva disciplina científica.

2. UNA NUEVA ÉPOCA

Lo primero que debe subrayarse del escenario que vivimos es el cambio de época. No está claro si se encuentra ya la humanidad dentro de una sociedad postcapitalista o postindustrial o postmoderna. Hay diferentes opiniones en torno a esto. Sin embargo, nadie podría negar que las transformaciones que se han dado en los últimos 50 años en el conocimiento y en la geopolítica han cambiado las coordenadas de la historia. La información y el conocimiento se han convertido en factores decisivos para todas las dimensiones de la vida humana. La economía y en general todos los procesos productivos de la vida social encuentran su mejor perspectiva a partir del concurso drástico y radical de las ciencias y las tecnologías. Los factores económicos como el trabajo, la propiedad, el agro, los servicios, encuentran sus determinaciones dentro de un mundo en el cual el conocimiento es la piedra de toque. De igual manera, la intensidad de los cambios cognoscitivos y sus aplicaciones en la sociedad son un factor nunca antes visto. Los tiempos y los ritmos de cambio provocan ellos mismos un nuevo escenario. Es en esta transición de épocas y con este tipo de componentes cognoscitivos que se construye el futuro. Y ese es el escenario más general en el cual debe colocarse la Educación Matemática como profesión y como disciplina científica.

En los nuevos tiempos el papel de las profesiones y la formación universitaria ya es otro. La amplitud del conocimiento y sus ritmos de progreso obligan a un replanteo serio de currículos, textos, recursos materiales y humanos, y, por supuesto, del papel de los maestros. Eso significa, entre otras cosas, que los programas de formación dados por las universidades deben adaptarse a la nueva perspectiva histórica. El papel de los contenidos, métodos y actitudes es otro. Más allá de las instituciones escolares formales, cada día juegan un papel mayor medios de comunicación colectiva, organizaciones informales e instrumentos interactivos como la red Internet. No se podrá enseñar contenidos sin tener en perspectiva el ritmo en el cual éstos se vuelven obsoletos en poco tiempo. Esto afecta a las disciplinas clásicas de formas diferentes. No es igual para la química que para las matemáticas, no es lo mismo para la economía que para la geología. Pero todas estas disciplinas deberán adaptarse a estos flujos radicales que gobiernan nuestro tiempo.

3. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, ENTONCES, SE INSCRIBE DENTRO DE UNA ÉPOCA DE TRANSICIÓN Y DE GRANDES EXIGENCIAS TEÓRICAS Y PRÁCTICAS

Todo esto pone en tensión extraordinaria la formación de profesionales en las universidades. Sobre todo porque mientras que el conocimiento y sus crecientes aplicaciones a la sociedad y el mundo transforman sus dominios y hacen desvanecer las fronteras clásicas de la disciplinas intelectuales, las instituciones de educación superior, en particular las universidades, todavía defienden esas fronteras con extraordinario celo. Es decir, existe una contradicción entre el estatus actual del conocimiento y sus aplicaciones, el momento que atraviesa la historia, y la situación de la academia. La perspectiva, sin embargo, apunta a una reforma profunda de las estructuras universitarias, y de los departamentos rígidos y estancos, hacia una visión que enfatiza la multidisciplina, interdisciplina y la transdisciplina. Esto significa, por ejemplo, que más que sobredimensionar las fronteras teóricas o prácticas en las nuevas profesiones o disciplinas científicas, se trata de buscar conscientemente un concurso transdisciplinario. Eso se aplica de manera particular a la Educación Matemática.

Probablemente, el rostro más palpable de esta etapa que ha hecho del conocimiento uno de sus principales determinantes, es el impacto de las tecnologías en la vida social e individual. Por un lado, debe señalarse cómo la relación entre ciencias y tecnología se ha inclinado cada vez más a favor de la segunda. Puesto de otra forma, si bien la ciencia y la tecnología constituyen hoy una realidad fundida, el peso de las aplicaciones y su inserción en la vida social se han convertido en un factor determinante para la construcción científica propiamente. Este equilibrio diferente también ejerce una presión en las actividades vinculadas con las ciencias.

En el caso de la educación estas implicaciones son de una naturaleza colosal. Las llamadas tecnologías de información y la comunicación apuntan a redefinir los currículos, los métodos y el lugar académico de las disciplinas educativas. En la didáctica tenemos un ejemplo de la influencia que han tenido las nuevas tecnologías en el ámbito educativo: la posibilidad de alcanzar nuevas competencias exigidas por la informatización de la cultura y el trabajo, han requerido de una didáctica que otorgue o le permita a los estudiantes un aprendizaje creativo, autónomo y de producción constante del saber. Para la Educación Matemática, íntimamente asociada con procesos informáticos, los cambios serán a la larga mucho más decisivos. Dunham y Dick coinciden en que "los estudiantes pueden aprender más matemáticas y en profundidad con el uso apropiado de la tecnología". (Dunham y Dick, 1994)

El uso de las computadoras en todos los niveles de la práctica profesional, desde la manipulación propiamente de los conceptos o contenidos teóricos hasta la organización del trabajo en clase o extra clase, ya ha ido generando transformaciones decisivas. A eso se añade el influjo de las calculadoras, con especial relieve la graficadoras, que permiten de una manera fácil y poco costosa la simplificación del proceso de cálculo, la incorporación de visualizaciones, y un apoyo central para poder realizar ambiciosos proyectos de enseñanza aprendizaje que no eran fáciles de desarrollar sin instrumentos como éstos. De hecho, el desarrollo de proyectos que involucran varias disciplinas matemáticas a la vez se ha potenciado con las tecnologías, y los proyectos se han convertido en un medio relevante en la Educación Matemática de varios países (entendiendo proyecto en el sentido pleno, es decir, desde los desafíos de la creatividad inicial, la elaboración de ideas hasta su ejecución).

De igual manera, los avances en la integración de diferentes tecnologías específicas que incluyen visión, sonido, información, interacción digitales, a partir de la computadora, lo que se conoce con el nombre de *multimedia*, ofrecen extraordinarias posibilidades conceptuales y académicas en la interacción y comunicación presentes en la práctica de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

A la par de este tipo de tecnologías debemos subrayar el papel de las redes electrónicas, con primordial importancia la Internet. La Internet ha potenciado la comunicación de una forma cuyas posibilidades nos coloca directamente en lo que hace algunos años era ciencia ficción. Como hemos señalado en otra ocasión:

"Aunque los resultados en la informática y la electrónica nos sobrecogen y maravillan persistentemente, pareciera poseer una trascendencia aun mayor, en términos sociales e históricos, el vertiginoso y poderoso progreso de las telecomunicaciones en los últimos años; los plazos y ritmos de la comunicación humana se han visto trastocados por estos cambios. En la pareja chips-conexiones, el último término nos coloca de cara a las características de la sociedad del futuro, más que un mundo digital estamos ante un mundo conectado en una escala cualitativamente superior, y siempre creciente. Esta potenciación de la comunicación abre las vías hacia un salto revolucionario en la organización social de la vida humana a lo largo del planeta. Es aquí donde mejor tocamos con nuestras manos la caducidad de la modernidad, de las fronteras territoriales, políticas, culturales, del Estado-nación, y, en particular, de las estrategias económicas o políticas que se apuntalan con una mirada hacia atrás, hacia el pasado. Comunicación e información se funden en un abrazo poderoso que transforma nuestro planeta. Pronto casi todo el orbe, con sus artefactos, personas y demás entes estará conectado en diferentes maneras bajo un manto de ondas, cables y cristales." (Ruiz, 2001)

Estos nuevos niveles de comunicación rápida y eficaz aumentan las posibilidades de intercambio de información, de organización de la actividad, y de la construcción cognoscitiva. Se ha convertido en el sustento tecnológico para fundamentar y aumentar cualitativamente estos procesos de internacionalización y globalización que definen el rostro de nuestro tiempo. Para la Educación Matemática asumir el uso de la tecnología se convierte en una tarea medular que permite nutrir de una manera transversal todos los otros esfuerzos que se realizan en la construcción de su espacio profesional y académico y todas las acciones que hoy se llevan a cabo.

Otro de los componentes fundamentales de en nuestra época es el proceso de globalización internacional que se potenció sustantivamente en las últimas dos décadas del siglo XX. Aunque se trata de un proceso que después de la Segunda Guerra Mundial empezó a desarrollarse, sin duda el mismo se vio intensificado y redefinido con la caída, más bien implosión, del mundo soviético, y el fin de la Guerra Fría. Las nuevas condiciones políticas y económicas han abierto procesos de muchísima mayor interacción entre los seres humanos en una escala nunca antes vista (Ruiz, 2001).

Para las comunidades científicas y académicas, para prácticas que por definición son o aspiran a lo universal e internacional, las dimensiones internacionales se potencian ahora con mucha mayor fuerza. Esto refiere directamente a los parámetros, objetos, métodos, procedimientos que se construyen y validan en cada comunidad académica. Para los educadores matemáticos cada vez será menos posible abordar la problemática de su práctica profesional al margen de las consideraciones y parámetros internacionales y globales. Esto impone, obviamente, conductas académicas y profesionales diferentes. De igual manera, los ritmos de construcción del conocimiento y, en particular, de avance de una disciplina científica o de una profesión se ven potenciados drásticamente por esta situación. Para la Educación Matemática, esto significa una perspectiva de mayores interacciones en la construcción teórica y la realización práctica de sus quehaceres, a través de procesos internacionales diferentes. Por ejemplo, en lo que se refiere a los estándares en los programas y métodos, así como en la formación universitaria de especialistas, la perspectiva debe ser global. Eso supone, entre otras cosas, una mayor circulación y participación de especialistas y profesionales en los diferentes países. Vamos a pasar ahora a las ideas.

4. LAS IDEAS SOBRE LAS MATEMÁTICAS

En las últimas décadas se ha renovado y expandido una tendencia filosófica que apuntala los aspectos sociales, psicológicos, materiales, empíricos y culturales presentes en las construcciones matemáticas. Se trata de una línea que se venía desarrollando por lo menos a partir de las consecuencias de los teoremas de Gödel en los años 1930 sobre la no completitud y no consistencia de las matemáticas. Su artículo famoso: "Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines" fue demoledor: "Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales)." (Gödel, 1981)

En cuanto a las ideas sobre la de naturaleza de las matemáticas y su construcción, han predominado a lo largo de la historia las ideas racionalistas. Es decir: en la tensión epistemológica entre sujeto y objeto, se ha apuntalado el papel de la razón como instrumento para la validación de las proposiciones y teorías matemáticas. Es esta visión la que encontramos de múltiples maneras en pensadores y filósofos desde Pitágoras, Platón, Aristóteles, Descartes, Leibniz, Kant. (Ruiz, 2003) Ahora bien, este énfasis ha estado asociado a otras ideas: el apriorismo (*versus* empirismo), a lo que se ha llamado absolutismo (la verdad de las matemáticas es incuestionable y absoluta), el infabilismo (que asocia la matemáticas con procesos infalibles de pensamiento). También ha estado el racionalismo asociado, aunque no siempre, a una sobredimensión de los aspectos formales y axiomáticos en las matemáticas. El platonismo, que afirma la existencia de objetos matemáticos universales al margen de la voluntad y la construcción humanas, también ha danzado en esta sala. Son este tipo de compulsiones intelectuales las que han dominado la filosofía de las matemáticas de múltiples formas.

Las matemáticas del siglo XIX con su especial abstracción y con las necesidades del rigor lógico empujaron hacia el apuntalamiento del Racionalismo y las ideas que lo suelen acompañar (Ruiz, 2003). El logicismo y el formalismo son expresión de la matemática nueva del siglo XIX. Sin duda, podemos decir que hasta la década de los años 1930 no se habían dado importantes crisis o dificultades en esta aproximación epistemológica. El famoso artículo de Gödel tiene una gigantesca cantidad de implicaciones en relación con la epistemología y también la ontología de las matemáticas. También posee grandes implicaciones en relación con los sistemas formales en general y los límites en particular de los formalismos en matemáticas y en el conocimiento. Los resultados de Gödel implican que cualquier formalismo suficientemente fuerte para expresar la teoría elemental de números es incompleto. La conclusión apuntaba a algo inevitable: las matemáticas no pueden ser formalizadas de manera absoluta; pero, además, lo cual es un corolario del trabajo de Gödel: en las partes formalizables no es posible garantizar la consistencia. (Ruiz, 1990)

Esto solo podía significar que las aspiraciones de fundamentar la matemática por la vía de los sistemas formales quedaban destruidas. Y éste era precisamente uno de los principales medios de fundamentación que se había intentado desde finales del siglo XIX; consecuencia: *crisis*. Aunque esto resultaba un duro golpe para el racionalismo y su cortejo intelectual, sin embargo, no implicó durante años en la conciencia occidental una vigorosa renovación de las ideas dominantes sobre la naturaleza de las matemáticas. La realidad es que las implicaciones de los resultados gödelianos no sólo no fueron sacadas completamente, sino que, tampoco, lograron ascender mucho en la comunidad intelectual y filosófica de buena parte del siglo XX.

Las reformas de los años 50 y 60 del siglo pasado en la Educación Matemática deben ponerse en el marco más amplio de la crisis de las filosofías dominantes sobre las matemáticas. Es la crisis de la sobredimensión del sujeto y la razón en la visión sobre la naturaleza de las matemáticas; acompañada de una subestimación, en consecuencia, de los aspectos empíricos, sociales y culturales, del objeto epistémico, en esta construcción cognoscitiva. Las filosofías que buscaban una fundamentación para una verdad absoluta y procesos infalibles en las matemáticas se vieron movidas por los resultados del gran lógico austriaco. Al mismo tiempo, en la acera del empirismo clásico o del empirismo lógico-neopositivista (Ayer, Nagel, Carnap, por ejemplo) no se encontraban respuestas realmente alternativas a las visiones racionalistas, absolutistas, apriorísticas de las matemáticas. El *inductivismo* extremo de Mill, por ejemplo, no encontró eco ni entre los mismos empiristas. La consecuencia era inevitable: el Racionalismo (y su cohorte de ideas acompañantes) siguió durante décadas siendo amo y soberano del espectro de la Filosofía de las Matemáticas. El Neopositivismo en los años 1930 trató de salirse de esta encrucijada afirmando una visión "*lingüística"*, más aún, sintáctica, que eliminaba todo contenido fáctico de las matemáticas (en última instancia, una visión *convencionalista*). Tanto racionalistas como neopositivistas compartían, en el fondo, la idea de que las matemáticas son simplemente *a priori*, la subestimación de los social e histórico, de lo empírico, así como en gran medida una sobreestimación de la axiomática y los sistemas formales en las matemáticas (Ruiz, 1990). Esto explica, en gran parte, cómo entre Frege y Russell logicistas, un Hilbert formalista y un Ayer neopositivista, podía existir un gigantesco territorio de elementos en común (a pesar de las fuertes discusiones filosóficas sostenidas entre ellos). El Empirismo Lógico ha sido una corriente filosófica bastante influyente en el devenir intelectual de nuestro, especialmente en el mundo anglosajón. A pesar de Gödel, la filosofía de las matemáticas siguió dominada por ideologías apriorísticas, axiomáticas, formalistas, racionalistas o convencionalistas durante mucho tiempo.

Hay que comprender, sin embargo, que los resultados de Gödel eran decisivos: no sólo se destruían las vías particulares de la fundamentación de la matemática que había existido hasta entonces, sino que se destruía cualquier fundamentación basada en el poder casi absoluto de los sistemas formales: "La crítica de los resultados gödelianos incide contra el dogmatismo que hacía de las verdades matemáticas, "zonas liberadas" infalibles. La verdad absoluta como base epistemológica no puede afirmarse en las matemáticas sin confundir la mente de los jóvenes. Las matemáticas ya no pueden verse a través de la interpretación axiomática, deductiva y formal. Lo que había sido un extraordinario paradigma en la reflexión sobre las matemáticas, cayó teóricamente en 1931." (Ruiz, 2003) Debían de haber conducido a una auténtica revolución conceptual: a una renovación de las nociones usadas anteriormente en la comprensión en las matemáticas. En este sentido, las categorías y distinciones del tipo de *analítico versus sintético*, *a priori versus a posteriori*, *inductivo versus deductivo*, deberían haber sido reconstruidas con otra visión; es más, en el territorio epistemológico, la confrontación entre Empirismo y Racionalismo debería haber dado a luz una nueva formulación. Sin embargo, la inercia predominó en la mayoría de matemáticos y filósofos y también educadores (Ruiz, 2000). Como hemos señalado antes: "En buena parte de la enseñanza de las matemáticas, la axiomática y los métodos deductivistas abstractos siguen siendo un rostro persistente. Todavía no nos hemos librado de aquellos énfasis en la unidad de las matemáticas por la vía de las estructuras y las reducciones axiomáticas. Y, sobre todo, se transmite a los estudiantes el respeto y miedo a un edificio inexpugnable, absoluto y verdadero, imposible de cuestionar." (Ruiz, 2003)

Frente a los intentos fallidos por dotar a las matemáticas de una fundamentación absoluta capaz de asegurar su verdad e infalibilidad, en los últimos 50 años se han dado importantes procesos por una comprensión de la naturaleza de las matemáticas que involucre significativamente sus dimensiones culturales, psicológicas; una perspectiva que subraya con relieve la falibilidad de los mismos, la ausencia de certeza absoluta. Se han dado, solo que poco a poco.

Vamos ahora a mencionar algunas de las aproximaciones que han buscado alternativas al racionalismo y a las posiciones que subrayan una dimensión infalible y una verdad absoluta en las matemáticas. Los dos términos que se invocan son los de empirismo y falibilismo.

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

Antes, a manera de advertencia: como sucede con la noción de "constructivismo" en Educación Matemática, los términos "Empirismo" y "falibilismo" son como paraguas que cubren muchas posiciones filosóficas.

Una primera referencia *falibilista* es Lakatos, con trabajos de los años 1960, donde hay influencia de Popper y de Wittgenstein, quien asumió un *cuasiempirismo*: las matemáticas son un producto de una práctica social e histórica. Señalaba, por ejemplo:

"La matemática, al igual que la lógica russelliana tiene su origen en la crítica de la intuición; ahora bien, los meta-matemáticos -como hicieron los logicistas- nos piden que aceptemos su intuición como prueba 'última'. De aquí que ambos caigan en el mismo psicologismo subjetivista que en otro tiempo atacaron. Pero, ¿por qué empeñarse en pruebas 'últimas' y autoridades 'decisivas'? ¿Por qué buscar fundamentos, si se acepta que son subjetivismos? ¿Por qué no admitir honestamente la falibilidad matemática e intentar defender la dignidad del conocimiento falible contra el escepticismo cínico, en lugar de hacernos ilusiones de que podemos reparar, hasta que no se note, el último rasgón del tejido de nuestras intuiciones 'últimas'?" (Lakatos, 1981)

Para Lakatos, el logicismo, intuicionismo y formalismo eran programas "euclídeos" (una pirámide, donde la verdad se transmite desde la cúspide a la base) regla para asegurar un fundamento absoluto de las matemáticas.

Piaget desarrolló una epistemología en general afirmando el papel de los aspectos psicológicos en la construcción cognoscitiva. Piaget estableció dos dimensiones en esta construcción: la psicogénesis y la sociogénesis. Buscó establecer una relación entre la primera y la historia de la ciencia. En el estudio de objetos epistemológicos acudió a una metodología experimental, la epistemología genética. De alguna manera, buscaba ofrecer una alternativa a las epistemologías que se encerraban en el llamado contexto de justificación, dejando por fuera el contexto de descubrimiento (siguiendo la distinción clásica de Reichenbach). Para Piaget, las estructuras matemáticas son las *estructuras más generales de la organización de lo real viviente*. Sus consideraciones conducen más allá de la psicología, a la biología. Hay un acuerdo entre matemáticas y realidad que se da a partir de que el sujeto es un ser biológico con condiciones y funciones de *autoregulación, autoorganización*. Es un caso de un acuerdo más general: el acuerdo entre todo ser vivo y su medio biológico. Dice Piaget: "la organización no es réplica del medio" en el que está el sujeto; y "no hay funcionamiento organizador sin un acuerdo con el medio". En términos de epistemología el énfasis se da aquí al sujeto. De hecho, hay una subestimación de las dimensiones socioculturales e históricas.

Morris Kline, otro ejemplo, aunque se trataba de un historiador de las matemáticas más que filósofo, no asume la visión clásica apriorista y también habla de las matemáticas como una ciencia "cuasi-empírica", cuya distinción en relación con otras ciencias empíricas es la "longevidad" de sus resultados. (Kline, 1980) La influencia de este académico a través de sus libros de historia de las matemáticas ha sido muy importante en la dirección de empujar una nueva visión de la naturaleza de las matemáticas.

Philip Kitcher ha hecho muchos aportes en esa dirección. Su "naturalismo" afirma que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos: "... las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a cualesquiera objetos." (Kitcher, 1983) También dice: "La materia última de las matemáticas es la forma en la cual los seres humanos estructuramos el mundo, realizando manipulaciones físicas crudas o a través las operaciones del pensamiento. (...) las matemáticas (son) como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual le atribuimos poderes con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar el ambiente que nos rodea". (Kitcher, 1988) En su visión: la matemática es ciencia de las operaciones humanas, y su desarrollo y racionalidad se establecen en la historia por medio de las comunidades matemáticas. Para este autor, en la construcción y justificación del conocimiento matemático debe participar la historia, no puede analizarse el crecimiento del conocimiento al margen de su contexto histórico.

Hay otras contribuciones en la misma línea que enfatizan lo social, cultural e histórico en la construcción matemática, entre ellas: Davis y Hersh (1980), Bloor (1976, 1983), Restivo (1985, 1992).

Aunque Paul Ernest ha enfocado su pensamiento hacia la filosofía de la Educación Matemática, resulta conveniente mencionar algunas de sus ideas que se colocan en esta nueva perspectiva que estamos reseñando. Este autor afirma un "constructivismo social". Ernest asume el origen empírico y la evolución social del conocimiento matemático, de generación en generación (como Kitcher), pero no enfatiza las conexiones históricas entre las comunidades matemáticas como criterio importante para la aceptación o justificación de los resultados matemáticos. (Ernest, 1991). Ernest, como los constructivistas, afirma un sujeto que construye teorías a partir de su experiencia y luego éstas se ajustan cuando se someten a otras experiencias reales. Entonces: "El conocimiento subjetivo es … objetivizado cuando es sometido a las reglas y condiciones que establece la comunidad matemática: lo que da objetividad a los conceptos de las matemáticas es el acuerdo con estas reglas; la sociedad da la objetividad. La práctica matemática descansa en ese ir y venir entre el conocimiento subjetivo y el objetivo, definido por ese sostén sociogremial; no obstante, en las matemáticas el otro criterio adicional -por su naturaleza, inteligimos nosotros- es la consistencia lógica de los resultados." (Ruiz, 2003)

¿Cuál es la importancia de adoptar este tipo de enfoques filosóficos en relación con las matemáticas? La relevancia de asumir la falibilidad es lo que el mismo Ernest afirma:

"El establecimiento del conocimiento matemático como falible y casi empírico significa que las matemáticas no están herméticamente selladas y separadas de otras áreas del conocimiento, la actividad y los valores humanos. Esto significa que en las matemáticas al igual que en las ciencias y otras áreas del conocimiento humano el contexto de descubrimiento y de justificación se penetran mutuamente. Consecuentemente, no se les puede negar a los asuntos sociales, culturales y éticos un impacto sobre las matemáticas y el conocimiento matemático y debe admitirse con un rol esencial y constitutivo en la naturaleza del conocimiento matemático." (Ernest, 1994))

Esto, en particular, tiene implicaciones significativas en la Educación Matemática. No es lo mismo partir de matemáticas con verdades absolutas y siempre infalibles, que afirmar su vulnerabilidad y su estrecha relación con el resto de ciencias naturales y su colocación dentro de contextos históricos y sociales precisos. Es relevante para afirmar su naturaleza histórica, su rostro humano, y, por lo tanto, incidir positivamente en la percepción y el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, el fortalecimiento de una visión de las matemáticas que incluye la heurística, la historia como factor edificante, las dimensiones empíricas, ha sido muy importante para apoyar estrategias educativas como la resolución de problemas en la Educación Matemática, uno de los principales ejes que se ha desarrollado en varias partes del mundo desde los años 1970.

Antes de pasar a la reseña de otros aspectos, es conveniente señalar que las perspectivas y enfoques sobre la naturaleza de las matemáticas que hemos señalado no se encuentran separadas de otras ideas en torno a la construcción científica. Podemos decir que en la misma "frecuencia de onda" están las ideas de cambio desarrolladas en la década de 1960 en la disciplina de la historia de la ciencia. Se trata de una nueva formulación del llamado "externalismo". En este proceso participaron investigadores como Kuhn, Feyerabend, Toulmin, y el mismo Lakatos. El enfoque apunta hacia la evolución de las comunidades científicas como factor de validación de los resultados en el conocimiento científico. Anteriormente había un choque entre dos posiciones extremas en la metodología de la historia de la ciencia: un internalismo (idealista fuerte y extremo) versus un externalismo (de filiación marxista). Ni uno ni otros daban una explicación metodológica apropiada. Feyerabend atacó la metodología neopositivista y clamó por "introducir la vida de nuevo en el entendimiento y práctica de la ciencia" (Ruiz, 2003). Kuhn atacó el modelo usual de la ciencia: un proceso psicosociológico, armado del concepto de paradigma. Estas ideas renovaron metodológicamente la historia y la filosofía de la ciencia: "La teoría de Kuhn lo que establece es, entonces, un puente con las comunidades científicas entre el devenir propiamente conceptual de la ciencia y el devenir social. Hace incidir, entonces, el análisis de la Historia de la Ciencia en objetos concretos de carne y hueso. Este es un buen punto de partida metodológico, a pesar de las dificultades de precisión que, posteriormente, otros teóricos han encontrado en los conceptos de Kuhn (paradigma, ciencia normal, ciencia extraordinaria)". (Ruiz, 2003)

Entonces, invocando todos estos elementos teóricos, se trata de no insistir tanto en las dimensiones internas a las teorías científicas (su lógica, consistencia, etc.) como en aquellos contextos sociales e históricos en los que las teorías son construidas y adquieren su validez. Los criterios, valores, procedimientos deben entenderse dentro de contextos socioculturales histórico precisos. Esto empuja en la Educación Matemática hacia varias direcciones: por un lado, interpretar las matemáticas (a pesar de su naturaleza abstracta) dentro de contextos sociohistóricos, y por eso mismo introducir esos contextos como medios relevantes para la enseñanza aprendizaje. No solo como reserva de anécdotas sobre personajes de las matemáticas, sino como metodología capaz de nutrir estrategias y currículos. Por otra parte, para sostener los procesos de construcción de la misma Educación Matemática no solo como una disciplina académica, sino como una comunidad científica.

Existen diferentes dimensiones en la problemática de la Educación Matemática; se trata de una situación compleja en la que intervienen de manera entrelazada y mutuamente condicionante muchos factores. ¿Por qué la importancia que damos a las ideas filosóficas dentro de este escenario que determina la Educación Matemática? No todos los factores inciden de igual manera. Los métodos y técnicas específicas para resolver problemas particulares por ejemplo, son importantes. La mayoría de los congresos internacionales de enseñanza de las matemáticas dedican una gran parte de su tiempo a este tipo de asuntos. De hecho, lo que suele provocar el mayor interés en los profesores en servicio es persistentemente los talleres de capacitación en didácticas y tecnologías, los laboratorios. Sin embargo, y a pesar de todo lo importante que estas actividades e investigaciones puedan resultar, insistimos: es en el territorio de la epistemología y la ontología de las matemáticas, porque es aquí donde podemos encontrar mayores niveles de esclarecimiento necesario para enfrentar la problemática de la que hemos hablado; es lo que puede brindar una perspectiva integradora de las diferentes quehaceres e investigaciones; especialmente, en un contexto lleno de múltiples escuelas de pensamiento que compiten en la Educación Matemática.

En el escenario histórico que vivimos, este tipo de enfoques filosóficos, epistemológicos y culturales son el marco más general dentro del que podemos colocar muchas de las tendencias de la Educación Matemática actualmente y que se fortalecerán de cara al futuro.

5. LA CONSTRUCCIÓN DE UNA NUEVA PROFESIÓN Y DISCIPLINA CIENTÍFICA

Los nuevos caminos en busca de dotar a la comunidad de educadores de la matemática de su verdadera fisonomía, fronteras, objetos y métodos, condujeron también a la realización de importantes investigaciones en dos direcciones: por un lado, la experiencia en el aula propiamente, resultados de prácticas y técnicas, formas de experimentación pedagógica, desarrolladas por los protagonistas en el proceso de enseñanza aprendizaje; por el otro lado, relevantes investigaciones en la definición teórica más general del nuevo espacio profesional. Aquí por ejemplo, podemos apreciar grandes temáticas como la resolución de problemas (técnica y estrategia metodológica a la vez), la etnomatemática, la modelación matemática, la psicología cognitiva o la Didáctica de la Matemática (en su aproximación francesa). Estas temáticas han nutrido múltiples revistas y libros, así como una multitud de seminarios y congresos en todo el mundo.

Se ha dado un desarrollo y una consolidación significativos de la Educación Matemática, lo que se puede apreciar, por ejemplo, por medio de sus amplios dominios de acción: grupos de investigación, publicaciones, reuniones, etc.

Varias actividades

Hay varios grupos internacionales asociados, por ejemplo, a la *International Commission on Mathematical Instruction*, ICMI, organización establecida por primera vez en el *International Congress of Mathematicians* que tuvo lugar en Roma in 1908 (por propuesta de David Eugene Smith). El *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) reúne matemáticos, educadores de la matemática e historiadores de la matemática, y maestros de diferentes niveles son miembros activos de este grupo. Otro grupo importante es el *International Group for the Psychology of Mathematics*

Education, PME. Este fue establecido en 1976 en el congreso internacional ICME3 celebrado en Karlsruhe. Este grupo de investigadores promueve contactos internacionales y intercambio de información y formación científica sobre la psicología de la Educación Matemática, busca una cooperación entre psicólogos, matemáticos y maestros. También existe un grupo internacional de Etnomatemática, inspirado por Ubiratan D'Ambrosio, el *International Study Group on Ethnomathematics* ISGEm. Recientemente, en el congreso ICME-9, se constituyó la *International Organisation of Women and Mathematics Education* (IOWME) como hombres y mujeres de veinticuatro países preocupados por los asuntos de equidad y justicia social en la Educación Matemática.

Otro grupo de naturaleza internacional muy importante es el *Theory of Mathematics Education*, TME, creado en 1984 en el ICME 5. Sus temas principales: "matemáticas, diseño de *currículum*, estudio de los modos de construcción por los alumnos del significado de las nociones matemáticas, las interacciones profesor - alumno, la preparación de los profesores, métodos alternativos de investigación, etc." (Godino, 2003) Por ejemplo, en 1985 discutieron: "... teorías sobre la enseñanza; teoría de las situaciones didácticas; teoría interaccionista del aprendizaje y la enseñanza; el papel de las metáforas en teoría del desarrollo; Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas; el papel de las teorías empíricas en la enseñanza de la matemática; la importancia de las teorías fundamentales matemáticas; conceptos teóricos para la enseñanza de la matemática aplicada; la teoría de la representación como base para comprender el aprendizaje matemático; estudios históricos sobre el desarrollo teórico de la Educación Matemática como una disciplina." (Godino, 2003)

En 1990, otro ejemplo, se creó el grupo *Philosophy of Mathematics Education*, por iniciativa de Paul Ernest. Este grupo dirigido sus intereses racionalizar opciones falibilistas y socioculturales de las matemáticas, a fundamentar una filosofía de la Educación Matemática y crear una red internacional sobre estos temas.

Las reuniones regionales son muchísimas; entre ellas: las *Conferences of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME, las *Conferencias Inter Americanas de Educación Matemática* CIAEM, las *Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa* RELME, etc. Las CIAEM tienen una trayectoria que se remonta al año 1960, en Bogotá, Colombia, que representó el principal impulso a la reforma de las matemáticas modernas en América Latina, con el influjo del insigne matemático norteamericano Marshall Stone.

También existe una gran cantidad de publicaciones regulares sobre los problemas de la Educación Matemática. Como por ejemplo: *Journal for Research in Mathematics Education,*

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

Educational Studies in Mathematics, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Recherches en Didactique des Mathematiques, etc.

Todos estos aspectos expresan el progreso de una disciplina. Pero, a continuación, hay que establecer de cuál disciplina estamos hablando.

6. ¿QUÉ ES LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA?

Sin duda, existen diferentes percepciones de lo que es la Educación Matemática. Steiner cita varios ejemplos: "Entre los que piensan que la Educación Matemática existe como ciencia, encontramos una variedad de definiciones diferentes, por ejemplo, el estudio de las relaciones entre matemática, individuo y sociedad, la reconstrucción de la matemática actual a nivel elemental, el desarrollo y evaluación de cursos matemáticos, el estudio del conocimiento matemático, sus tipos, representación y crecimiento, el estudio del aprendizaje matemático de los niños, el estudio y desarrollo de las competencias de los profesores, el estudio de la comunicación e interacción en las clases. etc." (Steiner, 1985, citado por Godino (2003)). Brousseau afirma sobre la didáctica: "una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos" (Brousseau, 1989, citado por Godino (2003)). Steiner ofrece una definición de la didáctica de las matemáticas: "el complejo fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno" (Steiner, 1984) Tal vez deba subrayarse la complejidad del concepto Didáctica de la Matemática, puesto que incluye una colección muy grande de actividades y está organizada por múltiples dimensiones.

Conviene señalar algunos elementos de lo que pensamos podría considerarse que es la Educación Matemática: ésta incluye todos aquellos procesos sociales y culturales que buscan lograr un aprendizaje de los conceptos y métodos de las matemáticas. Existen varias dimensiones: los currículos matemáticos para los diferentes niveles de la educación formal o informal, los textos y todos los recursos que se utilizan en la enseñanza aprendizaje de la matemáticas, la organización gremial de los educadores de la matemáticas, la enseñanza aprendizaje práctica realizada por los educadores de la matemática (es decir, el desarrollo de las lecciones, y el éxito o fracaso de los procesos realizados), las teorías sobre la naturaleza de la educación (epistemología, la ontología, etc.), las ideas prácticas y los recursos estratégicos para realizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, etc. ¿Cómo organizar todos estos elementos?

Realizar esta tarea se puede hacer siguiendo varios modelos. Por ejemplo, la aproximación de Steiner que coloca la educación matemática como parte de un sistema de enseñanza de las matemáticas; en este sistema se encuentra la formación de profesores, el desarrollo curricular, materiales didácticos, evaluación etc. A la vez, las disciplinas referentes giran periféricamente alrededor de este sistema: psicología, sociología, matemáticas pedagogía, etc. La Educación Matemática (que es la formulación que más se usa en los países anglosajones) se entiende aquí como didáctica de la matemática (términos que se usan más en el continente europeo). (Godino, 2003) Puede, también, verse a partir de la aproximación tetraédrica de Higginson, más simple, en la cual la Educación Matemática integra cuatro componentes: filosofía, sociología, matemáticas, psicología. Esta última aproximación busca responder a las preguntas correspondientes sobre el campo: qué enseñar, por qué, a quién y dónde, cuándo y cómo. (Godino, 2003) En la primera aproximación tenemos un sesgo más estructural, en la segunda es más epistemológico el enfoque.

Nos resulta conveniente, para nuestros propósitos en este ensayo, hacer distinciones más básicas y generales que nos permitan englobar el conjunto de las actividades realizadas por los participantes en la comunidad de educación matemática. En esta visión que proponemos la Educación Matemática va un poco más lejos de lo que entienden los autores arriba mencionados sobre sus fronteras, y lo que nos parece (a pesar de esta amplitud) de mayor conveniencia para abordar las perspectivas de este campo intelectual, tanto como profesión así como disciplina científica.

Podemos señalar para intentar dar una estructura de la Educación Matemática la existencia de dos grandes categorías de actividad: por un lado, la Educación Matemática teórica EMt, y, por otro lado, la Educación Matemática práctica EMp. Con la primera nos referimos a todas aquellas actividades de construcción de ideas sobre la Educación Matemática y sus diferentes procesos. Son las actividades que generan enfoques epistemológicos, aproximaciones filosóficas, la introducción de ideas de otras disciplinas, valoraciones sobre la tecnología y su impacto dentro de la disciplina, y, en general, el lugar donde se encuentra también la construcción de fundamentos teóricos para la Educación Matemática. Nos referimos a la EMp como aquel conjunto de actividades que generan instrumentos y métodos para la enseñanza aprendizaje, currículos, metodologías o didácticas específicas, propuestas de organización de la lección, estrategias de uso tecnológico. Por supuesto, existe una intersección no vacía entre estas dos grandes categorías de actividades en las que hemos organizado la Educación Matemática. Más aún, hay asuntos que se tratan a veces dentro de la EMt y a veces dentro de la EMp. Puesto de otra forma, los diferentes colectivos de académicos muchas veces trabajan en ambas categorías de actividad a la vez; más en algunos grupos que en otros. La escuela francesa, por ejemplo, hace contribuciones en las dos como parte de su perspectiva intelectual; los interaccionistas apuntalan sobre todo los aspectos teóricos epistemológicos.

Existen disciplinas científicas y académicas de las que se nutre la Educación Matemática: la matemáticas propiamente, la historia y filosofía, la lingüística, la psicología, la sociología, la educación en general. La forma y el peso en que estas disciplinas nutren la Educación Matemática es un importante tema de investigación. Podemos decir, sin embargo, que conviene tener un principio metodológico: no se trata de algo sancionado de manera *a priori*, sino que depende de qué actividad o parte de la Educación Matemática se esté considerando. De nuevo, la composición específica de las variables que afectan o influyen la Educación Matemática debe establecerse por la vía del análisis concreto de la situación concreta. Las declaraciones universales de aplicación absoluta no resultan ser las más convenientes a la hora de buscar la mejor comprensión de la naturaleza de la Educación Matemática y sus actividades en varios planos.

En lo que se refiere a la EMp, por un lado es importante señalar la amplia propuesta de currículos y una extraordinaria construcción de textos y recursos audiovisuales y digitales. Reformas curriculares como, por ejemplo, las impulsadas por el NCTM en los Estados Unidos han tenido una gran repercusión. La organización de currículos por medio de estándares y principios está en el debate internacional. No es éste el lugar apropiado para ampliar la investigación en torno a la gigantesca cantidad propuestas específicas para el uso de tecnologías diferentes en la Educación Matemática, sin embargo debe subrayarse la relevancia de estas últimas como factor que permea de manera transversal currículos, textos y la actividad propia de las lecciones.

Nos interesa resaltar aquí que en los últimos años se han desarrollado importantes propuestas metodológicas sobre la base de investigaciones y diversas experiencias. Es desde esta óptica, dentro de la categoría de las actividades de la EMp, que vamos a incluir la resolución de problemas, la modelación matemática, y la etnomatemática, aunque pueden realizar actividades en la EMt.

La resolución de problemas se ha convertido ya no sólo en una técnica, una estrategia metodológica general en cuanto describe una característica central de las matemáticas, y además "constituye una noción didáctica acorde a las exigencias educativas de la era

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

tecnológica" (Pais, 2002). Tanto en la construcción matemática como en su aprendizaje se encuentra la resolución de problemas. Esto hace que todos los conceptos y métodos a enseñar puedan replantearse a través de problemas, cuyas fronteras y complejidades o su pertinencia deben ser establecidas con base en la investigación rigurosa. "La resolución de problemas pretende atribuir a la Educación Matemática un valor mucho más destacado que la simple memorización, repetición de modelos y automatismo" NCTM, 2000). Esta estrategia metodológica facilita procesos de raciocinio y enriquece el proceso de aprendizaje a través de la creatividad generada en los estudiantes en la búsqueda de soluciones a los distintos problemas. Se ha dado un paso de considerarla una colección de técnicas y orientaciones heurísticas, a subrayarla como un proceso y como una estrategia global.

La modelación matemática, por otra parte, pretende construir o reconstruir modelos de lo real como parte del aprendizaje efectivo con estrategias muy variadas. Esto apuntala la utilidad de las matemáticas y su capacidad de describir partes del mundo. Los objetivos y procedimientos para su construcción en la clase también deben ser adecuados a los niveles formativos. En ese sentido, el uso de tecnologías de la información y comunicación son un apoyo formidable, porque permiten el desarrollo de proyectos de modelación que resultarían muy complejos sin su participación. Esta orientación empuja a potenciar campos como las probabilidades, la estadística y la matemática discreta (grafos, combinatoria, análisis numérico) como medios muy útiles en la construcción de modelos. Sobre este tema por ejemplo el Comité Ejecutivo del ICMI ha apoyado más recientemente la construcción de un grupo internacional nuevo sobre aplicaciones y modelación. Una importante conferencia, por ejemplo, fue desarrollada en Dortmund, Alemania, en el año 2004.

La etnomatemática es otra tendencia que gana muchos investigadores. No sólo afirma contextos socioculturales para las matemáticas, lo que se hizo al principio: un rescate de las matemáticas de grupos indígenas o periféricos, sino también busca, con mayor relevancia, construir estrategias que permitan a un grupo meta cultural acceder a la matemática. Puesto de otra forma: no todas las escaleras y andamios pedagógicos necesarios en el aprendizaje efectivo de las matemáticas pueden ser iguales; la diversidad es el punto de partida, y esto es clave para enseñar matemáticas. Por ejemplo, deben existir estrategias y métodos distintos para trabajar con grupos urbanomarginales, campesinos, indígenas, etc.

La investigación ha sido uno de los temas claves en la Educación Matemática de los últimos años. Y una discusión interesante se ha dado en torno a si debe haber una separación entre investigación y acción educativa. Es decir, si debe realizarse la investigación por un sitio y la actividad profesional en la clase (la del profesor) por otro. En esto ha habido varias posiciones. Por ejemplo, la escuela francesa de la didáctica de las matemáticas, como en el caso de Brousseau, ha afirmado tajantemente que debe establecerse una clara separación entre ambas. Es decir:

"En las experiencias del didacta, conviene, por el contrario, que se respeten ambas lógicas. Se ejercen dialécticamente, conducidas por personas diferentes, dotadas de poderes equilibrados. Es preciso que el profesor pueda estar completamente orientado hacia el objetivo de enseñanza que le está asignado y que las condiciones en las que ejerce esta acción estén fijadas explícitamente, casi contractualmente, por otro. El enseñante puede aceptar o renunciar a cada instante a proseguir, según piense poder actuar de la mejor manera por el bien de los alumnos o no. Es responsabilidad del investigador el saber si las condiciones realizadas son precisamente aquellas para las que él había previsto realizar observaciones. Para conseguir que el enseñante no pueda ni ser desposeído de la autonomía que necesita, ni actuar como propietario de la clase y mostrar sólo lo que él quiere, hace falta que la didáctica disponga de algo más que una vaga ideología; necesita sólidos conocimientos sobre los propios fenómenos." (Brousseau, 1991)

Con ello, se separa de visiones que sostienen la conveniencia de incorporar la investigación como parte de la práctica profesional misma y realizarla con los profesores a la vez, como Jeremy Kilpatrick (1988): "Una barrera continua para el cambio es el fallo de los investigadores y profesores en nuestro campo para caminar juntos en la empresa de investigación. (...) parece que algo no funciona teniendo a un grupo decidiendo qué hacer y otro haciéndolo".

La distinción y separación de ambas actividades es, sin duda, conveniente, en especial si se apuntala como una disciplina científica. Debe haber especialización de tareas. No obstante, hay investigación a realizarse en el aula y por el enseñante, que debe verse también como parte del proceso de formación profesional y mejoramiento de las calidades del enseñante. Ambas cosas no están reñidas.

En los últimos años, debe consignarse, las diferentes escuelas de pensamiento en la Educación Matemática empujan hacia posiciones menos extremas y opuestas. No sólo al enfatizar la separación entre investigadores y profesores en servicio, y sus dominios de intervención, sino también en lo que se refiere diferentes métodos y enfoques. En los años 1970 y 1980 se vio un gran énfasis en enfoques psicoestadísticos con base en la influencia de la psicología de la Educación Matemática (en particular, de la epistemología genética). En los últimos años otro tipo de metodologías han ocupado un mayor espacio: interpretativo, etnográfico, antropológico, etc. (Godino, 2003). En realidad, dos tipos de investigación se han dado siempre: por un lado, una orientación de tipo positivista (que enfatizan la búsqueda de leyes y estrategias cuantitativas) y por otra parte, una orientación más interpretativa (que enfatiza los significados personales de los fenómenos y las interacciones de los participantes en los procesos cognoscitivos). La integración o complementariedad de estos enfoques es también un asunto que se encuentra en las reflexiones y discusiones de la comunidad de educadores de la matemática.

En torno a la EMt, las ideas que se han propuesto en la línea de investigación que se han desarrollado ha sido muchas. Tal vez, lo más conveniente sea establecer una organización de estos trabajos con base en dos categorías: por un lado, la que se refiere a aquellas aproximaciones de naturaleza esencialmente epistemológica en el sentido clásico en el papel del sujeto y el objeto epistémicos. Por otro lado, aquellas visiones que afirman cierto tipo de relación entre las matemáticas y las otras disciplinas científicas o académicas que participan en la Educación Matemática. Debe advertirse, sin embargo, que existe una gran cantidad de convergencias e intersecciones entre los enfoques que señalamos como epistemológicos en su esencia y aquellos que vamos a establecer en su relación con los componentes disciplinarios de la Educación Matemática.

Vamos a empezar por los principales trabajos o aproximaciones en el territorio de la epistemología clásica.

7. ENFOQUES EPISTEMOLÓGICOS

Para empezar, debe decirse que existe una clara distinción entre lo que son epistemologías de las matemáticas y aquellas de la Educación Matemática, como las diferencias entre matemáticos y educadores de las matemáticas. En relación con las matemáticas, por ejemplo, la epistemología buscaría explicar cuáles son los procesos de construcción matemática, la vinculación entre las construcciones subjetivas, conocimiento objetivo por validación de la comunidad científica y aquellos procesos de comunicación socioculturales, el significado de las construcciones matemáticas en la sociedad como constructos teóricos, etc. El componente educativo en la Educación Matemática genera una perspectiva totalmente diferente para los estudios de corte epistemológico.

Podemos afirmar que, durante muchos años, predominó una visión muy abstracta de la naturaleza de las matemáticas y una prescripción esencialmente conductista en los procesos de enseñanza aprendizaje. No es que este tipo de enfoques ya no exista o incluso no sea dominante, pero en las últimas décadas se ha buscado encontrar enfoques diferentes que se han abierto camino en la Educación Matemática en el nivel internacional. Podemos señalar, siguiendo a Sierpinska y Lerman (1996), los siguientes: una perspectiva constructivista (véase Von Glaserfeld 1984 y 1989), aquella que se puede llamar a socioculturalista (a veces algunos le dicen constructivismo social, pero es incorrecto) y una perspectiva interaccionista. También, es posible señalar una visión "antropológica" ligada a la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas.

La perspectiva constructivista buscó en los escritos de Piaget su principal fuente y la socioculturalista en Vygotsky (como por ejemplo: Vygotsky, 1978).

Para el constructivismo el énfasis está en el sujeto epistémico, lo que se traduce en la Educación Matemática en términos precisos: el profesor no transmite conocimiento, hace que el estudiante "les enseñe cómo desarrollar su cognición" (Confrey, 1990) Entre los aspectos individuales en el proceso de enseñanza aprendizaje donde hay dimensiones psicológicas y sociológicas, ellos enfatizan las primeras, aunque reconocen que el profesor enfatiza las segundas; en todo caso no deben confundirse las dimensiones. Precisamente, para el socioculturalismo, el énfasis debe estar en las dimensiones sociológicas: "... toda alta función mental fue externa y social antes de ser interna. Fue primera una relación social entre dos personas. Podemos formular la ley general de la genética del desarrollo cultural en la siguiente manera. Toda función aparece dos veces o en dos planos... Aparece primero entre personas como una categoría intermental, y después dentro del niño como una categoría intramental" (Vygotsky, 1978).

Se han dado importantes investigaciones en todas estas visiones, pero probablemente la que ha tenido un mayor impacto en la comunidad de educadores de las matemáticas es el constructivismo, lo que se puede apreciar en diferentes reformas curriculares a lo largo del mundo. Esto dominó los años 80 y 90 del siglo pasado, de una manera u otra (Ruiz, 2000).

El interaccionismo afirma una visión que asume lo social y cultural (en eso es cercano al socioculturalismo), pero su énfasis está en las interacciones entre sujeto y objeto, entre estudiante y profesor. Lo relevante no son los individuos sino las interacciones (Bruner, 1985). Algunos autores constructivistas se fueron inclinando por el interaccionismo en los últimos años. Paul Cobb es un ejemplo, e incluso externa una razón:

"El modo más sugerente que yo veo es complementar el constructivismo cognitivo con una perspectiva antropológica que considere que el conocimiento cultural (incluyendo el lenguaje y las matemáticas) se regenera continuamente y modifica por las acciones coordinadas de los miembros de las comunidades. Esta caracterización del conocimiento matemático es, naturalmente, compatible con descubrimientos que indican que las prácticas matemáticas auto-evidentes difieren de una comunidad a otra ... Además, tiene en cuenta la naturaleza evolutiva del conocimiento matemático puesta de manifiesta por el análisis histórico" (Cobb, 1990).

Estos movimientos intelectuales, incluso de cambios de orientación epistemológica, responden en gran medida a que uno de los problemas centrales de la epistemología no está resuelto: ¿cómo integrar adecuadamente en un marco teórico el conocimiento objetivo (cultural y social) con el subjetivo (tal y como está presente o se construye en los individuos)?

Los interaccionistas, para mencionar otro aspecto, dan un papel central al lenguaje, que bien consignan Sierpinska y Lerman:

"La orientación interaccionista hacia el lenguaje lo distingue tanto del constructivismo como de la perspectiva Vygotskiana, aunque comparte con ellos el rechazo de una visión representacionista del lenguaje ('el lenguaje como una representación del mundo'). En el constructivismo, el lenguaje es una expresión del pensamiento ('El lenguaje es moldeado sobre los hábitos de pensamiento' -Piaget, 1959, p. 79). Vygotsky vio en el lenguaje un medio de transmisión cultural. El interaccionismo deja de ver el lenguaje como un objeto separado -un útil- que puede ser usado para un propósito u otro (y que, en principio, podría ser reemplazo por algo diferente: algún otro medio de comunicación). Las personas no están tanto como hablando un lenguaje como que están 'languaging'." (Sierpinska y Lerman, 1996)

El "*languaging*" es un término de Bauersfeld (1995).

En algunos de estos autores, finalmente, se enfatiza también el carácter convencional del conocimiento (Bauersfeld, 1995; Gergen, 1995).

Esta aproximación posee algunos planteamientos didácticos. Por ejemplo, se afirma que los estudiantes y el profesor constituyen una cultura del aula aunque a través de la interacción, en esa interacción emergen las convenciones y convenios (no sólo aquellos referidos al contenido de la disciplina sino también a las condiciones sociales), y siempre hay un proceso de comunicación basado en la negociación y en significados compartidos. No se pretende, sin embargo, fabricar propuestas de acción didáctica, el énfasis es teórico epistemológico. Se busca entender cómo se constituyen los significados matemáticos en esas culturas de la clase, si esos significados se estabilizan y cómo, cuál es la naturaleza de esos significados y su relación con la cultura de la clase en la que se generan.

Es posible ver estas tres aproximaciones epistemológicas como parte de un marco teórico en el que la psicología del aprendizaje en general juega un papel medular. Puesto en otros términos: se utilizan teorías generales del aprendizaje y la construcción cognoscitiva de forma aplicada a las matemáticas.

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

Estas teorías del aprendizaje en general se acumulan en dos puntos extremos: por un lado, hacia el conductismo y, por el otro lado, hacia el constructivismo.

Si bien la escuela francesa de didáctica de las matemáticas no se reduce a una posición epistemológica, adopta un enfoque epistemológico que bien vale la pena mencionar aquí, aunque le daremos mayor atención más adelante.

La perspectiva de la "antropología" de las matemáticas de la *Didactique* ha generado nuevos conceptos como los de transposición didáctica, obstáculo didáctico (derivado de la idea de obstáculo epistemológico de Bachelard, Balacheff, 1988), situación didáctica (Brousseau, 1986), "transposición didáctica" (Chevallard 1985 y 1991)), efectos didácticos, campos conceptuales (Vergnaud, 1996), ingeniería didáctica (Artigue, 1996). Esta visión busca establecer un puente teórico entre conceptos y construcciones matemáticas y la didáctica de las mismas a partir precisamente de las nociones arriba señaladas. Posee posiciones comunes con el constructivismo y el socioculturalismo. Por ejemplo, afirman que el conocimiento se construye a través de la interacción entre sujeto y objeto, hay construcción dentro del sujeto usando la experiencia de esa interacción (no hay construcción del conocimiento si el estudiante no está personalmente involucrado en la situación didáctica). Al mismo tiempo, asumen la existencia de constructos teóricos (las matemáticas) que pesan significativamente en las situaciones de aprendizaje. En este sentido, el contexto, el entorno, la cultura, las conductas cognoscitivas de los estudiantes, etcétera, participan en el proceso de manera relevante.

Se afirma aquí, también, que la epistemología de la Educación Matemática debe incorporar otras dimensiones sociales que están más allá de la simple relación epistémica sujeto objeto, anclada en la construcción cognoscitiva solamente. Del sujeto epistémico debe pasarse a un sujeto didáctico, por ejemplo. De allí, el sentido de antropología.

Con un profundo sentido epistemológico se ha desarrollado la fenomenología didáctica de Freudenthal. En las ideas de este famoso investigador se subraya el papel de los objetos matemáticos en la organización de los fenómenos; los primeros son instrumentos de organización de los segundos. Es decir, los objetos (conceptos, estructuras, métodos matemáticos) organizan fenómenos que se refieren tanto al mundo como a las matemáticas mismas. La perspectiva aquí sin embargo refiere a la didáctica. Lo que se plantea es la construcción de situaciones con los fenómenos que organiza un determinado objeto matemático para generar el aprendizaje de ese objeto específico. La posición que se sostiene aquí es que el aprendizaje no se realiza adecuadamente como adquisición de conocimientos u objetos teóricos (es decir, constructos fijos rígidos que se toman casi como elementos físicos del entorno), sino, más bien, se desarrolla un proceso de *constitución* de esos objetos matemáticos. Esa constitución o construcción exige las situaciones, los fenómenos, que organiza el objeto matemático en referencia. Se afirma que en este proceso de constitución (*versus* adquisición) se subraya el papel de las matemáticas en la resolución de problemas. Puesto de otra forma, la fenomenología provoca crear situaciones problemas, los fenómenos, para lograr construir los objetos mentales matemáticos que se buscan.

Podemos mencionar que Freudenthal, al igual que la escuela francesa de Didáctica de la Matemática, apoya la idea de una didáctica específica con base en los contenidos matemáticos: "Desconfío fuertemente de las teorías generales del aprendizaje, incluso si su validez se restringe al dominio cognitivo. La matemática es diferente - como he enfatizado anteriormente -, y una de las consecuencias es que no hay en otros campos un equivalente didáctico a la invención guiada" (Freudenthal, 1991, citado por Godino (2003))

Debe señalarse que estas visiones son apenas enfoques, los diversos investigadores asumen una multitud de variantes y opciones. Bajo la palabra constructivismo hay de todo, e igual sucede con el socioculturalismo y el interaccionismo. Las conexiones e intersecciones son muchas.

¿Cómo resumir entonces lo que observamos en este territorio intelectual? Las posiciones extremas desde el punto de vista epistemológico que afirmaban las teorías de los intelectuales que apuntalaban una u otra visión epistemológica no se han preservado como dominantes. Por un lado debido a las dificultades en la comprensión y explicación propia de los fenómenos epistemológicos: no hay territorio infalible y absoluto. Y, por el otro lado, porque en asociación estrecha con el desarrollo de la Educación Matemática como disciplina y profesión, los ritmos de progreso y de experiencia son muy rápidos. Más bien, podemos afirmar, que lo que hoy domina en la comunidad de educadores de la matemática es una visión ecléctica, que echa mano de unas y otras ideas (Ruiz, 2000). Hay muchos énfasis, a veces difíciles de distinguir unos de otros. Lo más sensato a decir es que en la epistemología de la Educación Matemática de nuestro tiempo, asunto que afecta relevantemente la enseñanza aprendizaje, observamos un vigoroso flujo de construcciones teóricas y, subrayamos, una actitud menos rígida y dogmática, abierta, con una intención más bien práctica con base en la utilidad de los resultados en el aula. Y, debe insistirse, no existe una correlación directa, determinante, entre una epistemología de la Educación Matemática y la pedagogía o didáctica. Lo mismo se aplica a teorías y métodos no epistemológicos.

Vayamos ahora a considerar aquellos trabajos que expresan enfoques en referencia a la relación de los diferentes componentes históricos de la Educación Matemática.

8. RELACIÓN ENTRE LAS DISCIPLINAS COGNOSCITIVAS COMPONENTES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Es conveniente que establezcamos, en primer lugar, nuestra visión sobre la relación que existe entre las matemáticas y la Educación Matemática.

Aunque la profesión de enseñar matemáticas es parte de la historia y la cultura del planeta desde hace mucho tiempo, sin embargo, se trata de una especialidad profesional que ha logrado una definición más precisa de su fisonomía en las últimas décadas. Hace algún tiempo se consideraba la enseñanza de las matemáticas como un arte en el cual el éxito en el aprendizaje se encuentra en dependencia del dominio por parte del profesor de ese arte y de la voluntad y dedicación de los estudiantes. No existía una gran diferencia para las personas entre matemático y profesor de matemáticas, salvo en el nivel en que se enseñaba. Se trata, sin embargo, de una visión que todavía domina en las apreciaciones sobre la enseñanza de las matemáticas que posee la población en general. Actualmente, se entienden ambas actividades académicas como profesiones distintas, con perfiles y funciones académicas y sociales diferentes. Los parámetros, entonces, para medir las calidades de estas profesiones son distintos. No es, por supuesto, que no existe intersección entre ambas, y más aun debe haber una relación estrecha; como comenta Mark Saul: "la próxima generación de matemáticos debe ser capaz de interactuar más de cerca con educadores y examinar juntos las estructuras cognitivas y matemáticas que permitan haya una pedagogía reflejo de estructuras de alto nivel" (Addington, S.; Clemens, H.; Howe, R.; Saul, M., 2000). Y, más aun, es esencial entender la vital relación entre matemáticas y Educación Matemática, ya en un sentido teórico. Como bien señala Godino:

"… cuando adoptamos un modelo epistemológico apropiado sobre la actividad matemática y sus producciones culturales, la investigación sobre una parte importante de los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas adquiere connotaciones propias de la investigación matemática, no en cuanto a la organización deductiva de los resultados matemáticos, sino en lo referente a los procesos de reinvención y descubrimiento que se ponen en juego en ambas disciplinas. Si atendemos a estos procesos, la Didáctica de la Matemática se relaciona estrechamente con la actividad matemática, pudiendo aportar descripciones y explicaciones del propio desarrollo de la matemática, concebida como una construcción humana." (Godino, 2000)

ISSN 1809– 0354 v. 1, nº 3, p. 175-210, set./dez. 2006

Sin embargo, es también importante subrayar las diferencias y los elementos de definición propios que las separan para comprender mejor cómo se complementan o cómo pueden participar dentro de una perspectiva científica o académica común. Como señala Schoenfeld con toda justicia:

"… la investigación sobre Educación Matemática (en el nivel de pregrado) es una empresa muy diferente de la investigación en matemáticas, y que la comprensión de las diferencias es esencial para poder apreciar el trabajo en este campo (o mejor aún, contribuir a dicho trabajo). Los descubrimientos son raramente definitivos; usualmente son sugestivos. La evidencia no es del tipo de las demostraciones, sino que es acumulativa, progresando hacia conclusiones que se pueden considerar como fuera de una duda razonable. Una aproximación científica es posible, pero se debe tener cuidado para no ser cientifista -lo que cuenta no son los adornos de la ciencia, tales como el método experimental, sino el uso del razonamiento cuidadoso y los estándares de evidencia, empleando una amplia variedad de métodos apropiados para la tarea correspondiente." (Schoenfeld, 2000)

En este punto, se vuelve importante hacer una breve distinción acerca de las diferencias entre matemáticas y Educación Matemática. En primer lugar, las matemáticas orientan su quehacer, en esta etapa de su evolución, hacia objetos abstractos. La Educación Matemática se dirige hacia las actividades, resultados y construcciones teóricas realizadas por individuos. De esta forma, se trata más bien de una ciencia social. Hay aquí una clara diferencia cualitativa. Los factores sociales que intervienen en la educación matemática son muchos y esto hace que se establezca una relación privilegiada con otras disciplinas científicas que abordan el objeto social. No es el caso de las matemáticas. Esto significa, por ejemplo, a la hora de presentar los resultados de investigación o de acción en la Educación Matemática hay una referencia a individuos de carne y hueso y sus contextos. Mientras tanto, en las matemáticas sus resultados de investigación están desprovistos al máximo, y esto es lo conveniente, de los entornos sociales e individuales que pueden intervenir en su construcción cognoscitiva. Puesto en otros términos, mientras que el contexto puede no ser relevante, a veces más bien una limitación, en las matemáticas, en la Educación Matemática sucede lo contrario: el contexto es esencial.

En segundo lugar, precisamente por lo anterior, la intensidad o el grado de interdisciplina o transdisciplina que existe en la Educación Matemática es mucho mayor que en la matemática. En esta última es posible integrar álgebra y geometría, topología y análisis, etc., pero la distancia teórica entre estos campos es distinta a la que existe, por ejemplo, entre psicología y matemática, lingüística y sociología. Esto significa, para empezar, que la actitud multidisciplinaria y transdisciplinaria en la Educación Matemática es un requisito teórico y práctico. Lo que no sucede con las matemáticas de la misma manera o con la misma intensidad. Precisamente, por acercarse más a las ciencias sociales, hay una gran cantidad de nociones y conceptos poco precisos en la Educación Matemática. Más aún, es posible tener diferentes aproximaciones al significado de estas nociones, objetos y conceptos. Mientras tanto en las matemáticas se tiene un alto nivel de precisión en los conceptos y objetos utilizados dentro de sus teorías.

Además, el impacto social de la Educación Matemática es de una naturaleza diferente al que provoca la matemática. Su relación con la educación y todos los procesos formativos de una sociedad la coloca fuertemente en el territorio de la política y los lineamientos presentes en el desarrollo de las sociedades.

Por otro lado, las características de progreso cognoscitivo son distintas en matemáticas y en educación matemática. La frecuencia de los cambios y la presencia de saltos cualitativos con un impacto de transformación elevado son mayores en la Educación Matemática.

Debe decirse, sin embargo, que las matemáticas aplicadas poseen una relación más estrecha con la Educación Matemática que las matemáticas puras. Las primeras sin ser una ciencia social deben interpretar y usar necesariamente los contextos sociales y las construcciones teóricas en este campo.

Estas pocas diferencias, que apenas hemos resumido, revelan dos lógicas científicas en la construcción cognoscitiva y la comunicación social de los resultados obtenidos.

Vamos ahora a agrupar algunos de los trabajos en la Educación Matemática a partir de su visión de la relación entre matemáticas y los otros componentes teóricos que la nutren.

Existen dos enfoques distintos en esta temática: por un lado, el que afirma que la Educación Matemática es parte de las matemáticas, visión que se asocia a la didáctica de las matemáticas de la escuela francesa. Por otro lado, el enfoque que afirma a la Educación Matemática dentro de una perspectiva más bien pluridisciplinaria.

Para la escuela francesa, en la Didáctica de las Matemáticas las matemáticas no sólo son un componente más dentro de un sistema formado por otras disciplinas científicas y académicas. Tampoco el componente principal. Sino que la didáctica de las matemáticas debe considerarse propiamente como parte de las matemáticas o, convenientemente, dentro de la comunidad matemática. Los conceptos matemáticos a enseñar establecen en esta visión el fundamento central para la didáctica que corresponde a cada uno. No existe didáctica general que se aplique de manera específica a la matemática. La Didáctica de la Matemática emerge de la matemática misma. Se admite, sin embargo, que existe una "transposición didáctica" que transforma el concepto matemático en un objeto para la enseñanza aprendizaje; es decir, el objeto matemático y el objeto didáctico correspondiente son distintos gracias a este proceso de transposición. Pero, se insiste, el objeto didáctico no es una realización o aplicación de nociones generales de enseñanza y aprendizaje. La didáctica de las matemáticas busca entonces, entre otras cosas, construir "situaciones didácticas" específicas en las que es posible lograr el aprendizaje de los objetos matemáticos considerados. Se acepta aquí, entonces, que existen objetos matemáticos como construcciones socioculturales establecidas por las comunidades de matemáticos. De ella se parte como base para construir los objetos didácticos. Cabe, sin embargo, preguntarse cuáles son los procesos determinantes de esos objetos matemáticos o su status epistemológico.

Esta visión, en esencia, combate una subordinación de las matemáticas a otras disciplinas teóricas, en particular a la psicología y las teorías generales de la enseñanza aprendizaje, y apuntala una posición que podría verse como una subordinación de la Educación Matemática a la matemática.

En el otro lado encontramos el enfoque que afirma que la Educación Matemática debe verse, desde un punto de vista teórico, formada con la participación de diferentes disciplinas.

Aquí encontramos, en realidad, dos posiciones. Por un lado, aquella (que critica fuertemente la escuela francesa) que haría de la didáctica de las matemáticas básicamente una tecnología sostenida o fundada por otras ciencias. En este caso, hay una auténtica subordinación de la Didáctica de la Matemática a otras ciencias. Esta visión ha sido llamada por los didactas franceses: "pluridisciplinar".

Por otra parte, es posible pensar en una visión que afirme la importancia más que de un área de estudio científico específico con fronteras rígidas, una aproximación interdisciplinaria, y más bien transdisciplinaria, que impida el establecimiento de restricciones o limitaciones artificiales para la Educación Matemática. Esta visión sostendría la importancia de incorporar los conocimientos y resultados obtenidos en otras disciplinas que puedan ser significativas para la Educación Matemática. En ese sentido, como afirma Steiner, sería posible construir un sistema total para la Educación Matemática que no establezca límites fijos entre la disciplinas. Es decir, se invoca flexibilidad y globalidad en la construcción cognoscitiva.

En nuestra opinión, la Educación Matemática debe verse como una función de varias variables. El componente de partida, el referente esencial, son las matemáticas. Las características de los objetos matemáticos establecen importantes limitaciones y fronteras para la didáctica de ellos. No obstante, debe insistirse en la diferencia entre la matemática y la Educación Matemática. Y, en particular, la participación de otras variables diferentes en la Educación Matemática. Los resultados teóricos de otras disciplinas científicas, dentro de límites de pertinencia y validez, deben ser plenamente utilizados. Dadas las condiciones del desarrollo del conocimiento moderno una óptica basada en la transdisciplina es hoy en día de gran importancia. La ruptura de la disciplinas es una de las más poderosas variables intelectuales de nuestra época. La construcción de la Educación Matemática como disciplina científica si bien requiere el establecimiento de fronteras debe poder construirse dentro de este nuevo contexto que enfatiza precisamente el desvanecimiento de las fronteras cognoscitivas y el apuntalamiento de perspectivas transdisciplinarias.

En los últimos años las investigaciones han ido empujando hacia la convergencia de los enfoques teóricos. Por ejemplo, dentro de los mismos psicólogos de la Educación Matemática, que en un primer momento potenciaban la Educación Matemática como aplicación de la psicología del aprendizaje en general, que incluso apuntan a una psicología de la Educación Matemática con fisonomía propia. Es decir, una psicología que no se puede ver como una aplicación mecánica de teorías generales del aprendizaje o de la evolución psicológica: los problemas específicos de las matemáticas en su relación con la enseñanza y aprendizaje exigen un marco teórico psicológico diferente. Por ejemplo, Fischbein (1990), del PME, afirma que la psicología de la Educación Matemática puede convertirse en paradigma para la Educación Matemática y, lo que es importante, afirma que la psicología general más sido incapaz de responder a las necesidades específicas de las más matemáticas. Esto en parte porque la psicología no es una disciplina deductiva; es decir, que la aplicación de sus principios generales a un caso específico es insuficiente. Como señala Godino (2003), la Educación Matemática plantea sus propios problemas psicológicos que no se encuentra en el área profesional del psicólogo. Todo esto empuja, aunque dentro de una perspectiva psicológica, a la búsqueda de conceptos (más allá de los generales) específicos para las matemáticas, y, además, una revalorización de los mismos conceptos psicológicos cuando éstos se refiere a las matemáticas y su enseñanza aprendizaje (Godino, 2003).

En la misma dirección, las diferentes perspectivas epistemológicas universales se han orientado hacia constructos teóricos que no son meras aplicaciones de teorías generales. Esto se aplica, por ejemplo, a las visiones constructivistas o socioculturalistas o interaccionistas, que en un principio habían sostenido teorías muy generales que luego aplicaban a la matemáticas. Hay una dirección sistemática hacia la construcción de fundamentos teóricos específicos para la Educación Matemática. Esto ha planteado, si se quiere, aproximaciones eclécticas, puentes intermedios en las teorías.

9. CONCLUSIÓN

Nuevas visiones filosóficas (epistemológicas y ontológicas) sobre la naturaleza de las matemáticas y de la Educación Matemática, uso intenso de tecnologías de comunicación e información, todo dentro de una globalización e internacionalización radicales, apuntalan el nuevo escenario histórico y teórico en que se construye la Educación Matemática de nuestro tiempo.

Al dirigir nuestra mirada intelectual hacia los problemas y retos de esta disciplina intelectual y social, posee relieve especial el territorio filosófico para interpretar las raíces más importantes de toda esta situación. La filosofía de las matemáticas, resaltamos, aunque ha estado relegada a un plano secundario (a veces con justa razón), se convierte en un recurso valioso a la hora de encontrar soluciones a los problemas en esta profesión y a la hora de determinar las estrategias educativas que tenemos que abordar. No es extraño entonces que se haya dado una amplia elaboración en torno a los fundamentos teóricos de la Educación Matemática. Diferentes escuelas epistemológicas y didácticas se han desarrollado. La reflexión y discusión, tanto en la epistemología como en la ontología, cubrirán una buena parte de las elaboraciones teóricas en torno a esta nueva disciplina científica y práctica profesional.

En el nuevo espacio profesional y la nueva disciplina científica que supone la Educación Matemática práctica se fortalecen o amplían ciertas estrategias o aproximaciones: la resolución de problemas, la modelación matemática, la etnomatemática y, en todos los casos, la construcción de la nueva disciplina profesional. La participación de los profesores en servicio en la definición de acciones, programas, capacitaciones e investigaciones, finalmente, es cada vez mayor y más decisiva.

En todas las orientaciones que hemos mencionado en la Educación Matemática internacionalmente hay un énfasis en la investigación. Se invoca la conciencia de que la investigación no solo debe nutrir una profesión relativamente nueva, sustentar un espacio académico o científico, sino que es un componente vital para la práctica educativa ordinaria; no progresar en investigación es comprometer negativamente el éxito en los resultados de la formación matemática de un país. El fuerte desarrollo de la investigación que se ha dado ya ha generado nuevos conceptos y métodos y la creación de importantes grupos internacionales.

Conceptos y términos nuevos, incluso, como el caso de la Didáctica de las Matemáticas de la escuela francesa, ofrecen sugestivos y útiles derroteros para avanzar en esta profesionalización.

Debe reconocerse que la Educación Matemática no constituye hoy una comunidad intelectual y profesional homogénea sino, más bien, un conjunto de escuelas de pensamiento con propuestas diversas que a veces compiten entre ellas. Se trata de una etapa de amplia ebullición profesional y científica en la que se busca establecer las definiciones y las perspectivas. Integrar todos los componentes en un marco teórico y práctico que sustente la profesión de la Educación Matemática y que nutra la disciplina en términos científicos y académicos, es una gran tarea compleja que se está realizando en varias latitudes, y los resultados de estos esfuerzos serán muy relevantes para beneficio del aprendizaje de las matemáticas y el logro de nuevos niveles de satisfacción con ella en todo el planeta. Como en todo campo cognoscitivo nuevo, todo está en transición, sin posiciones o ideas definitivas o acabadas. No hay espacio para actitudes infalibles o absolutistas: es el espacio para la creatividad, el escepticismo sano, la crítica y la imaginación racional.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Addington, S. Clemens, H. Howe, R y Saul, M. (2000). "Four Reactions to Principles and Standards for School Mathematics". *Notices of the AMS*, 47, 1072-1079.

Artigue, M. (1996). "Ingenierie didactique". En *Didactique des Mathématiques*, Brun J. (org.), Lausanne-Paris: Delachaux.

Aspray, W. y Kitcher, P. (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis: Univ. of Minnesota Press.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Tesis Université de J. Fourier, Grenoble.

Bauersfeld, H. (1995). "Language Games in the Mathematics Classroom: Their Function and their Effects", en P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Learning: Interaction in Classroom Cultures*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hilldale, NJ.

Bishop, A. J. *et al* (edits.) (1989). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Bloor, D. (1976). *Knowledge and Social lmagery*, Routledge, London.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge*, Macmillan, London.

Brousseau, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 33-115.

Brousseau, G. (1989). "La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques". *Article occasionnel n. 2. IREM de Bordeau*x.

Brousseau, G. (1991). "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda Parte)". *Revista Enseñanza de las Cienci*as. España, Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona: vol: 9,1, pag: 10-21. Traducción al español de Luis Puig.

Bruner, J. S. (1985). "The Role of Interaction Formats in Language Acquisition", en JP. Forgas (ed.), *Language and Social Situations*. Springer-Verlag, New York.

Chevallard, Y. (1985). *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensée Sauvage.

Cobb, P. (1990). "Multiple Perspectives", en L.P. Steffe and T. Wood (eds.), *Transforming Children's Mathematical Education: International Perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.

Cobb, Paul (1994). "Where is the mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development" en la revista *Educational Researcher* volumen 23, número 7, octubre.

Confrey, J. (1990). 'What Constructivism Implies for Teaching', in R.B. Davis, C. A. Maher, and N. Noddings (eds.), "Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph No. 4, 107-122.

Davis, P.J. and Hersh, R. (1980). *The Mathematical Experience,* Boston: Birkhauser.

Dunham, P. H. y Dick, T. P. (1994). "Research on graphing calculators". *Mathematics Teacher*, 87, 440-445.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Hampshire, G.B.: The Falmer Press.

Ernest, P. (1994). "In response to professor Zheng". Philosophy of *Mathematics Education Newsletter* 7 (February 1994).

Forgas, JP. (ed.) (1985). *Language and Social Situations*. Springer-Verlag, New York.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics educatio*n. (China lectures). Kluwer A.P.

Gergen, K. J. (1995). "Social Construction and the Educational Process", en L. P. Steffe and J. Gale (eds.), *Constructivism in Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.

Gödel, K. (1981). *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial.

Godino, J. (2000). "Algunas ideas y lecturas complementarias al articulo de Schoenfeld". Es el artículo: "Purposes and Methods of Research in Mathematics Education". *Notices of the AMS*, Volume 47, Number 6; June/July 2000. La traducción al español es precisamente de Juan Godino.

Godino, J. (2003). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/ Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Huse, T. y Postlethwaite, T. N. (Eds.) (1989). *The International Encyclopedia of Education Supplementary* Volume, Oxford: Pergamon Press.

Kitcher, P. (1983). *The nature of Mathematical Knowledge*, New York Oxford: Oxford University Press.

Kitcher, P. (1988). "Mathematical Naturalism" en el libro editado por William Aspray y Philip Kitcher, *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis: Univ. of Minnesota Press.

Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of New Maths*. London: St. James Press. Existe una versión en español: *El fracaso de la matemática moderna*, por Alianza Editorial, en Madrid, España.

Kline, M. (1980). *Mathematics: the loss of certainty*. New York: Oxford University Press.

Lakatos I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge.

Lakatos, I. (1981): *Matemáticas ciencia y epistemología*. Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial, 1981. Versión original: *Mathematics, Science and Epistemology - Philosophical Papers*. Volume 2, Cambridge University Press, 1978.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, EUA: Reston, VA.

Pais, L. (2002). *Didática da Matemática: Uma análise da influencia francesa*. Brasil: Auténtica Editora, Rua Januária.

Piaget, J. (1959). *The Language and the Thought of the Child*, Routledge and Kegan Paul Ltd., London.

Polyá G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press: Princeton (2 vols.). La obra fue publicada primeramente en 1945.

Restivo, S. (1985). *The Social Relations of Physics, Mysticism and Mathematics*, Reidel, Dodrecht.

Restivo, S.. (1992). *Mathematics in Society and History*. Kluwer, Dordrecht.

Ruiz, A. (1990). *Matemáticas y filosofía. Estudios logicistas*. San José: EUCR.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las matemáticas*. Heredia: EUNA.

Ruiz, A. (2001). *El destino de Costa Rica y la educación superior*, San José, Costa Rica: EUCR-CONARE.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José: EUNED.

Schoenfeld, A. (2000). "Purposes and Methods of Research in Mathematics Education". *Notices of the AMS*, Volume 47, Number 6; June/July 2000. Traducción al español de Juan Godino.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). "Epistemologies of mathematics education". En Bishop, A. J. et al (edits.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp.827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. (Traducción de Juan Godino).

Steiner, H.G. (1984); Balacheff, N. y otros. (Eds.) *Theory of mathematics education (TME). ICME* 5. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Steiner, H.G. (1985). "Theory of mathematics education (TME): an introduction". *For the Learning of Mathematic*s, Vol 5. n. 2, pp. 11-17.

Vergnaud, G. (1996). "La théorie des champs conceptuels". En *Didactique des Mathématiques*, Brun J. (org.), Lausanne-Paris: Delachaux.

Von Glaserfeld, E. (1984). "An introduction to radical constructivism", en el libro editado por P. Walzlawick: *The invented reality* (pp. 17-40). New York: Norton.

Von Glaserfeld, E. (1989). "Constructivism in Education" en la obra editada por Huse, T. y Postlethwaite, T. N. *The International Encyclopedia of Education* Supplementary Volume, Oxford: Pergamon Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: the development of higher mental processes.* Cambridge, Boston: Harvard University Press 1978; versión original de 1960 en ruso Razvitie vysshikh psikhicheskikh funktsii, Moscú: Akad. Ped. Nauk.