

**O QUE INDICAM AS INVESTIGAÇÕES DO GRUPO DE PESQUISA EM
EDUCAÇÃO ALGÉBRICA (GPEA) RELATIVAS AO ENSINO E À
APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA?**

**WHAT DO THE INVESTIGATIONS OF THE RESEARCH GROUP IN ALGEBRAIC
EDUCATION (GPEA) INDICATE REGARDING THE TEACHING AND LEARNING
OF EQUATIONS IN BASIC EDUCATION?**

**¿QUÉ INDICAN LAS INVESTIGACIONES DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN
SOBRE EDUCACIÓN ALGEBRAICA (GPEA) EN RELACIÓN CON LA
ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES EN LA EDUCACIÓN
BÁSICA?**

BIANCHINI, Barbara Lutaif
barbara@pucsp.br

PUC-SP – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo
<https://orcid.org/0000-0003-0388-1985>

LIMA, Gabriel Loureiro de
gllima@pucsp.br

PUC-SP – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo
<https://orcid.org/0000-0002-5723-0582>

RESUMO Neste artigo, apresentam-se os resultados de um mapeamento exploratório-analítico que teve por objetivo caracterizar onze dissertações e uma tese acerca do objeto matemático equação, no âmbito do ensino ou da aprendizagem na Educação Básica, desenvolvidas por pós-graduandos em Educação Matemática na esfera do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), desde sua criação em 2003. Por meio da análise, depreendeu-se que há demandas por um maior número de teses de doutorado cujo tema seja equação em diferentes perspectivas; por investigações de cunho experimental, cujos sujeitos sejam professores em formação inicial, em exercício e em formação continuada; e por estudos relativos ao uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação nos processos de ensino e de aprendizagem de diferentes tipos de equações.

Palavras-chave: Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica. Mapeamento. Equações.

ABSTRACT This article presents the results of an exploratory-analytical mapping, which aimed to characterize the 11 dissertations and one thesis about the

mathematical object equation, in the context of teaching or learning in Basic Education, developed by graduate students in Mathematics Education in the sphere of the Algebraic Education Research Group (GPEA), since its creation in 2003. By means of the analysis, it was deduced that: there is a demand for a greater number of doctoral theses whose theme is equation, in different perspectives; for experimental investigations having teachers as subjects, in initial training, in service and in continued training; and for studies concerning the use of Digital Information and Communication Technologies in teaching and learning processes of different types of equations.

Keywords: Algebraic Education Research Group. Mapping. Equations.

RESUMEN Este artículo presenta los resultados de un mapeo exploratorio-analítico, que tuvo como objetivo caracterizar las 11 disertaciones y una tesis sobre el objeto matemático ecuación, en el contexto de la enseñanza o aprendizaje en la Educación Básica, desarrolladas por estudiantes de posgrado en Educación Matemática en el ámbito del Grupo de Investigación en Educación Algebraica (GPEA), desde su creación en 2003. A través del análisis, se dedujo que: hay demandas de un mayor número de tesis doctorales cuyo tema sea la ecuación, en diferentes perspectivas; de investigaciones de carácter experimental teniendo como sujetos a los profesores, en formación inicial, en ejercicio y en formación continua; y de estudios relacionados con el uso de las Tecnologías Digitales de la Información y la Comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de diferentes tipos de ecuaciones.

Palabras clave: Grupo de Investigación en Educación Algebraica. Mapeo. Ecuaciones.

1 INTRODUÇÃO

Fundado em 2003, e com 98 dissertações de mestrado e 30 teses de doutorado defendidas até o final de agosto de 2022, o Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), sediado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), constitui-se como um dos *loci* de referência de produções científicas relativas à Educação Algébrica. Nesse sentido, torna-se relevante sumarizar, de uma perspectiva crítica e meta-analítica, os resultados das investigações do Grupo, com foco em diferentes objetos matemáticos, ação que temos realizado desde 2019, no âmbito de um projeto mais amplo, intitulado *Revisão Sistemática de Pesquisas Brasileiras na área da Educação Matemática*, em desenvolvimento desde 2017. Esse tipo de trabalho é importante porque possibilita amalgamar em uma única publicação os resultados de

diferentes estudos, contribuindo para o avanço do campo de conhecimento em foco a partir da acumulação sistemática de informação.

Em relação às produções do GPEA, restringindo-nos a dissertações e teses, inicialmente analisamos estudos acerca dos cinco conteúdos matemáticos mais explorados nas pesquisas produzidas pelo Grupo, a saber: Números e Operações, Generalização de Padrões, Função, Álgebra Linear e Equações (Bianchini; Lima; Machado, 2019). Posteriormente, realizamos um mapeamento de estudos que tiveram como objeto a Álgebra Linear, subsidiados por teorias da Didática Francesa (Bianchini; Lima, 2021). Em trabalho subsequente, nosso foco foram as pesquisas direcionadas à Educação Básica (zero a 17 anos de idade, sendo obrigatória para indivíduos de 4 a 17 anos) fundamentadas por preceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval (Bianchini; Lima, 2022).

Dando prosseguimento a este estudo, realizamos um mapeamento de cunho exploratório-analítico, na acepção de Biembengut (2003), de onze dissertações e de uma tese defendidas por pós-graduandos membros do GPEA acerca do objeto matemático equação no âmbito do ensino ou da aprendizagem na Educação Básica. Nas análises que empreendemos, consideramos os seguintes aspectos: tipo de pesquisa (documental ou experimental), sujeitos (professores ou estudantes, obviamente no caso das pesquisas experimentais), temáticas relacionadas às equações que se constituíram como objetos de estudo dos pesquisadores, objetivos e materiais analisados, metodologias, referenciais teóricos, principais resultados e indicações para outras pesquisas.

2 METODOLOGIA

Do ponto de vista metodológico, o estudo realizado é de natureza qualitativa e caracteriza-se como o que Biembengut (2003) denomina de *mapeamento exploratório-analítico*. Essa concepção de mapeamento difere daquela assumida por outros pesquisadores, como, por exemplo, Fiorentini, Passos e Lima (2016), que enfocam mais nos aspectos descritivos de um determinado campo de estudo do que em seus resultados. Além de descrever onde (no caso, o GPEA), quando e quantos



estudos foram produzidos desde a criação do Grupo, os autores, as temáticas, os sujeitos, os referenciais teóricos e as metodologias, voltamos nossa atenção aos principais resultados e às indicações dos autores dos trabalhos analisados para futuras pesquisas e — como principal aspecto que diferencia o mapeamento exploratório-analítico — buscamos, a partir do *corpus* selecionado, “reconhecer padrões, evidências, traços comuns ou peculiares, ou ainda, características indicadoras de relações genéricas” (Biembengut, 2003, p. 5). Assim como Biembengut (2008), consideramos fundamental, além de ter clareza acerca do número de trabalhos produzidos e seus autores, compreender os progressos, em termos de conhecimentos, provenientes dos estudos mapeados, bem como perspectivas para novas pesquisas a partir do que já foi realizado.

Para determinar o *corpus* de análise para este artigo, inicialmente consultamos os currículos Lattes de todos os professores que orientam ou já orientaram investigações no GPEA. Identificamos e selecionamos as dissertações e teses por eles orientadas e que tiveram *equação* por objeto de estudo, com foco nos processos de ensino ou de aprendizagem no âmbito da Educação Básica. Em seguida, acessamos a Biblioteca Digital de Dissertações e Teses da PUC-SP¹ e compilamos as versões digitais das pesquisas encontradas. Assim, constituímos o *corpus*, composto por onze dissertações e uma tese, conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 – *Corpus* de análise deste estudo

Autor (Ano)	Título	Mestrado Acadêmico (MA)	Mestrado Profissional (MP)	Doutorado (D)
Marcelo Dias Pereira (2005)	Um estudo sobre equações: identificando conhecimentos de alunos de um curso de formação de professores de Matemática		X	
Silvio Barbosa de Oliveira (2006)	As equações diofantinas lineares e o livro didático de Matemática para o Ensino Médio	X		
Alessandro Jacques Ribeiro (2007)	Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico			s

¹ Disponível em: https://sapiencia.pucsp.br/?_ga=2.214697872.628996682.1612182449-149160779.1561464622. Acesso em: 4 maio 2022.



Eduardo Sad da Costa (2007)	As equações diofantinas lineares e o professor de Matemática do Ensino Médio	X		
Adriano de Moraes Martins (2008)	Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental	X		
José Anísio Daniel (2008)	Um estudo de equações algébricas de 1º grau com o auxílio do <i>software</i> Aplusix		X	
Rosana Aparecida da Costa Vaz (2008)	SARESP/2005: uma análise de questões de Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos registros de representação semiótica		X	
Wagner Marcelo Pommer (2008)	Equações diofantinas lineares: um desafio motivador para alunos do Ensino Médio	X		
Marcos Toshio Nagamachi (2009)	Equações no Ensino Médio: uma metanálise qualitativa das dissertações e teses produzidas no Brasil de 1998 a 2006	X		
Adriana Clara Hamazaki (2010)	Análise da situação de aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do Professor de 2009 do Estado de São Paulo	X		
Armando Pereira (2010)	Equações Algébricas no Ensino Fundamental: um panorama de dissertações da PUC-SP			
Lucimar de Andrade Hessel (2010)	Um estado do conhecimento de dissertações e teses brasileiras sobre equações: o uso das tecnologias no Ensino Médio (1998-2008)	X		

Fonte: elaborado pelos autores.

Em cada um dos trabalhos apresentados no Quadro 1, buscamos os elementos que almejávamos analisar, a saber: tipo de pesquisa (documental ou experimental), sujeitos (professores ou estudantes, obviamente no caso das pesquisas experimentais), temáticas relacionadas às equações que se constituíram como objetos de estudo dos pesquisadores, objetivos e materiais analisados, metodologias, referenciais teóricos, principais resultados e indicações para outras pesquisas. Passemos então à análise e discussão dos dados.

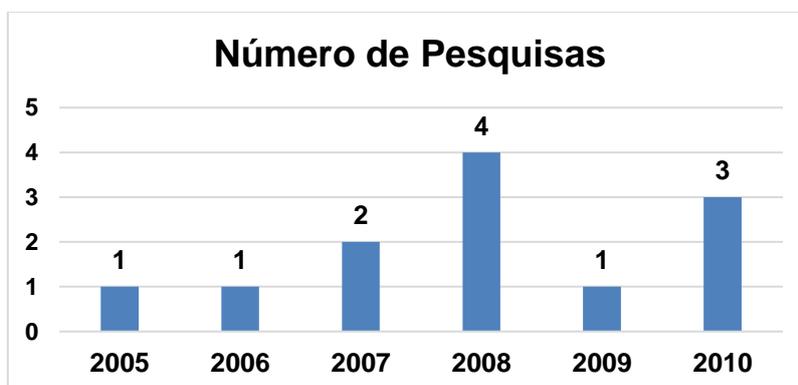


3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Como evidenciam os dados apresentados na Figura 1, todas as investigações do GPEA cujo foco foi o objeto matemático equação foram desenvolvidas entre 2005 e 2010, não havendo, portanto, produções recentes do Grupo com essa temática. Os anos de 2008 e 2010 foram aqueles nos quais mais trabalhos acerca do tema foram defendidos.

A análise do gráfico presente na Figura 1 revela a pertinência de, subsidiado pela experiência acumulada ao longo de quase 20 anos de pesquisas, o GPEA retomar os estudos relacionados aos diferentes tipos de equações, seus processos de ensino e de aprendizagem. O assunto não é explorado pelo Grupo há 12 anos e, nesse período, houve alterações e avanços relativos a vários elementos que podem impactar diretamente no trabalho com as equações em sala de aula, em especial, os recursos tecnológicos e as novas orientações curriculares. Retomaremos tais aspectos mais adiante.

Figura 1 – Número de pesquisas, por ano, tendo equação como objeto matemático



Fonte: elaborada pelos autores.

Como evidenciam os dados apresentados no Quadro 2, o *corpus* de análise é composto majoritariamente por pesquisas oriundas de mestrados acadêmicos (66,7%). Predominam as investigações de cunho documental (58,3%) e, entre as pesquisas de campo, estão mais presentes aquelas nas quais os sujeitos são



estudantes (80%). Em apenas uma pesquisa os sujeitos são professores e há somente uma tese de doutorado relativa à temática equações.

Quadro 2 – Detalhamento do *corpus* de análise

Tipo de Pesquisa	Nível			Sujeitos			Total
	MA	MP	D	Não há	Estudantes	Professores	
Documental	5	1	1	X			7
De campo	1	0	0			X	1
	1	3	0		X		4
Totais	7	4	1				12

Fonte: elaborado pelos autores.

As temáticas prevalentes nos estudos do GPEA sobre equações são, como evidenciado no Quadro 3, os mapeamentos de pesquisa relacionados às equações algébricas (quatro estudos) e às equações diofantinas lineares (três estudos). As demais temáticas exploradas — conhecimentos dos licenciandos, significados da noção de equação, análise de questões do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), emprego de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC)² vinculado às equações e as equações e inequações logarítmicas — estão, cada uma delas, presentes em apenas um trabalho.

Quadro 3 – Temáticas presentes nas investigações que compõem o *corpus*

Temáticas	Nível			Sujeitos			Total
	MA	MP	D	Não há (pesquisa documental)	Estudantes	Professores	
Equações diofantinas	3	0	0	1	1	1	3
Equações algébricas: mapeamentos de pesquisas	3	1	0	4	0	0	4
Análise de Questões do SARESP	0	1	0	0	1	0	1
Conhecimentos de licenciandos	0	1	0	0	1	0	1
Significados da noção de equação	0	0	1	1	0	0	1
Equações com TIC	1	0	0	0	1	0	1
Equações e inequações logarítmicas	1	0	0	1	0	0	1
Totais	8	3	1	7	4	1	12

² No ano em que o trabalho foi publicado, empregava-se o termo Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), em vez do atualmente em voga Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).



Fonte: elaborado pelos autores.

Por meio do Quadro 4, podemos observar, inicialmente, que das pesquisas documentais, cinco são de mestrado acadêmico, uma de mestrado profissional e uma de doutorado. Duas pesquisas de mestrado acadêmico, ambas voltadas a reflexões acerca do Ensino Médio, tiveram como foco a análise de materiais didáticos. Em uma delas, cujo objeto matemático foram as equações diofantinas lineares, a análise deu-se a partir de livros didáticos (Oliveira, 2006). Na outra, a investigação conduzida por Hamazaki (2010), foi analisada uma situação de aprendizagem presente na edição de 2009 do Caderno do Professor da Rede Pública do Estado de São Paulo, relativa ao tema equações e inequações logarítmicas. Quatro pesquisas (três de mestrado acadêmico e uma de mestrado profissional) tiveram por objetivo realizar sínteses de pesquisas acerca da temática em estudo neste artigo. Martins (2008) analisou estudos relativos às equações algébricas, no Ensino Fundamental II (atual Ensino Fundamental — Anos Finais), no período de 1998 a 2004. Pereira (2010), por sua vez, ampliou esse panorama, dedicando-se ao estudo do mesmo tema também no Ensino Fundamental, porém entre 2005 e 2008. Acerca de investigações relativas ao Ensino Médio, Nagamashi (2009) sintetizou as dissertações defendidas entre 1998 e 2004. Por fim, ainda se dedicando à síntese de pesquisas, Hessel (2010) adotou como *corpus* de análise as dissertações publicadas no período de 1998 a 2008 nas quais as equações foram articuladas ao emprego de TIC. Também no grupo das pesquisas documentais, encontra-se a tese de doutorado de Ribeiro (2007), que buscou, com base na análise de textos diversos, os significados da noção de equação no ensino de Matemática.

Quadro 4 – Objetivos e materiais analisados nas pesquisas documentais

Autor (Ano)	Nível			Objetivo e materiais analisados
	MA	MP	D	
Oliveira (2006)	X			Estudar a abordagem dada por duas coleções de livros didáticos, no Ensino Médio, ao tema equações diofantinas lineares.
Ribeiro (2007)			X	Investigar, tendo por referência textos diversos sobre Matemática e Educação Matemática, os significados da noção de equação no ensino de Matemática.
Martins (2008)	X			Realizar, a partir de 9 dissertações da área de Educação Matemática defendidas entre 1998 e 2004, uma síntese de



				pesquisas brasileiras voltadas ao Ensino Fundamental II que tratam de equações algébricas.
Nagamashi (2009)	X			Realizar, a partir de 6 dissertações da área de Educação Matemática defendidas entre 1998 e 2006 , uma síntese de pesquisas brasileiras voltadas ao Ensino Médio que tratam de equações.
Pereira (2010)		X		Desenvolver , a partir de 4 dissertações da área de Educação Matemática defendidas na PUC-SP entre 2005 e 2008 , um panorama sobre o tema equações algébricas no Ensino Fundamental .
Hessel (2010)	X			Realizar uma síntese , a partir de 4 dissertações brasileiras da área de Educação Matemática defendidas entre 1998 e 2008 , a respeito de equações com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação .
Hamazaki (2010)	X			Analisar uma situação de aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do Professor de 2009 referente ao terceiro bimestre do primeiro ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino Estado de São Paulo.

Fonte: elaborado pelos autores.

Das sete pesquisas documentais, como podemos observar no Quadro 5, cinco mencionam explicitamente sua natureza qualitativa. No entanto, dois estudos que não mencionam esse termo, a saber, Pereira (2010) e Hessel (2010), também se configuram como pesquisas qualitativas. Duas dessas sete investigações pautam-se na metodologia da Análise de Conteúdo: em uma delas (Oliveira, 2006) é empregada na acepção de Laurence Bardin e na outra (Hamazaki, 2010), de Christian Laville e Jean Dionne. Dois trabalhos (Martins, 2008; Nagamachi, 2009) recorrem à metanálise qualitativa como estratégia metodológica, ambos fundamentados nas ideias de Dario Fiorentini e Sergio Lorenzato. As considerações de Fiorentini a respeito das modalidades mapeamento e balanço de produções científicas subsidiam, do ponto de vista metodológico, a investigação de Pereira (2010). Um estado do conhecimento, conforme definem Joana Paulin Romanowski e Romilda Teodora Ens, é realizado por Hessel (2010). Ribeiro (2007), por sua vez, em razão do objetivo e da natureza de seu estudo, classifica-o exclusivamente como de caráter bibliográfico.

Quadro 5 – Metodologias empregadas nas pesquisas documentais

Autor (Ano)	Metodologias empregadas
Oliveira (2006)	Pesquisa qualitativa baseada na Análise de Conteúdo , na acepção de Bardin (1997).
Ribeiro (2007)	Pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico .
Martins (2008)	Estudo documental do tipo metanálise qualitativa , na acepção de Fiorentini e Lorenzato (2006).



Nagamachi (2009)	Estudo documental do tipo metanálise qualitativa , na acepção de Fiorentini e Lorenzato (2006).
Pereira (2010)	Estudo de caráter bibliográfico “na modalidade panorama” , inspirado na caracterização da modalidade mapeamento e balanço de Fiorentini (2002).
Hessel (2010)	Estudo documental do tipo estado do conhecimento , na acepção de Romanowski e Ens (2006).
Hamazaki (2010)	Análise documental com abordagem qualitativa , na concepção de Lüdke e André (1986) e Análise de Conteúdo , segundo Laille e Dionne (1999).

Fonte: elaborado pelos autores.

Pela própria natureza de quatro dos sete trabalhos documentais, que se constituem como sínteses de pesquisas, apenas em três estudos dessa categoria (Oliveira, 2006; Ribeiro, 2007; Hamazaki, 2010) há referenciais teóricos, como evidenciado no Quadro 6. Esses estão relacionados ao campo da própria Matemática, mais especificamente à Teoria Elementar dos Números (Oliveira, 2006), à didática francesa da Matemática (em especial, à Teoria dos Registros de Representação Semiótica e à Transposição Didática) (Oliveira, 2006; Ribeiro, 2007) e à Educação Algébrica, particularmente, ao pensamento algébrico, ao uso das variáveis, aos multissignificados de equações e às dificuldades em Álgebra elementar (Hamazaki, 2010).

Quadro 6 – Referenciais teóricos empregados nas pesquisas documentais

Autor (Ano)	Referenciais teóricos empregados
Oliveira (2006)	Do ponto de vista matemático: estudos a respeito da Teoria Elementar dos Números , de Campbell e Zazkis (2002), Ferrari (2002), além de artigos de membros do Grupo de Pesquisa Educação Algébrica, e de Guzmán (1992). Também foram contemplados os estudos e artigos correlatos ao tema equações diofantinas lineares de Rama (2005), Barros (1998), La Roque e Pitombeira (1991) e Silva (2002). Do ponto de vista didático: Transposição Didática , de Chevallard (1991).
Ribeiro (2007)	Teoria dos Registros de Representação Semiótica , de Duval (1993, 1999, 2003), e Transposição Didática , de Chevallard (1991, 1992) (com foco nas ideias de <i>objetos do saber e outros objetos</i>).
Martins (2008)	Não há, pela própria natureza da pesquisa.
Nagamachi (2009)	Não há, pela própria natureza da pesquisa.
Pereira (2010)	Não há, pela própria natureza da pesquisa.
Hessel (2010)	Não há, pela própria natureza da pesquisa.
Hamazaki (2010)	Estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) sobre aspectos do pensamento algébrico , de Ursini <i>et al.</i> (2005) acerca do uso das variáveis , de Ribeiro (2007) sobre os multissignificados de equações e de Figueiredo (2007) sobre dificuldades em Álgebra elementar .



Fonte: elaborado pelos autores.

Nas quatro pesquisas documentais realizadas a partir de metanálises, panoramas e estados do conhecimento, os principais resultados são os destacados no Quadro 7. Como indica Martins (2008), a maior parte das dissertações desenvolvidas entre 1998 e 2004, tendo por temática as equações algébricas no nível educacional que, na época, denominava-se Ensino Fundamental II, destacou a importância da produção de significados para tais objetos matemáticos ao trabalhá-los em sala de aula.

No que se refere às dissertações defendidas entre 1998 e 2005 relativas às equações no Ensino Médio, a pesquisa de Nagamachi (2009) sinaliza para a carência de estudos abordando as equações exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e aquelas relacionadas às cônicas. Além disso, há estudos que indicam a necessidade de maior articulação entre a Álgebra e a Geometria no trabalho em sala de aula com equações. Os resultados da pesquisa de Pereira (2010) explicitam, nas dissertações da área de Educação Matemática defendidas na PUC-SP entre 2005 e 2008, com a temática equações algébricas no Ensino Fundamental, similaridades entre as conclusões dos pesquisadores e entre as indicações para futuras pesquisas, apesar de os objetivos e os referenciais teóricos serem distintos. O número total de indicações para estudos futuros presentes nos quatro trabalhos analisados foi sete. Em quatro deles, as sugestões relacionam-se ao ensino e à aprendizagem de equações. Em dois, são sugeridas novas investigações relacionadas à utilização de recursos multimídia ou ferramenta computacional. Por fim, apenas em uma das pesquisas foi mencionada a possibilidade de focar, em estudos subsequentes, o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

A análise realizada por Hessel (2010) de quatro dissertações brasileiras elaboradas entre 1998 e 2008, na área de Educação Matemática, com foco em equações e uso de Tecnologias da Informação e Comunicação, explicita, no que diz respeito aos tópicos matemáticos, a predominância de representações gráficas e algébricas de funções polinomiais de 1º, 2º e/ou 3º graus e a necessidade de um



número maior de estudos focalizando a Álgebra associada ao emprego de Tecnologias da Informação e Comunicação.

Quadro 7 – Principais resultados obtidos via metanálises, panoramas e estados do conhecimento

Autor (Ano)	Principais resultados
Martins (2008)	Em relação às questões presentes em trabalhos de Educação Matemática sobre equações algébricas, identificamos cinco categorias: (i) equivalência, igualdade e operações inversas, (ii) busca de significados, (iii) ensino/aprendizagem por jovens e adultos, (iv) análise de erros, e (v) espaço de aprendizagem. Os resultados atestam uma dispersão nas categorias eleitas, entre os objetivos buscados nas pesquisas selecionadas, exceto “busca de significados”, que aparece em cinco das nove dissertações selecionadas. Em outras palavras, a maior parte dos pesquisadores que se propuseram a pesquisar esse tema se preocuparam com a importância da busca de significados para seu desenvolvimento em sala de aula. Não há confluência no emprego de referenciais teóricos e metodológicos ao abordar as equações algébricas.
Nagamachi (2009)	Três das seis dissertações analisadas têm como foco o estudo das equações algébricas. A outra metade se volta para equações com duas (ou mais) variáveis: equação da reta, sistemas lineares com parâmetros e equações diofantinas lineares. Há apenas um estudo voltado às equações relacionadas às cônicas. Não foram encontradas dissertações voltadas para o ensino e a aprendizagem de equações exponenciais, logarítmicas, ou trigonométricas, no período coberto pelo estudo. Duas das dissertações apontam a necessidade de conciliar a Álgebra e a Geometria e duas evidenciam a dificuldade dos alunos nesse tipo de articulação, talvez ocasionada pela pouca ênfase no domínio geométrico em livros didáticos. Outro resultado evidenciado é a dificuldade de alunos do Ensino Médio ao lidar com números negativos, explicitado em três dissertações.
Pereira (2010)	Os resultados indicaram que a maioria das pesquisas analisadas apresentou similaridades entre as conclusões dos pesquisadores e entre as indicações para futuras pesquisas. No entanto, ocorreram exíguas similaridades entre os objetivos dessas pesquisas e entre os referenciais teóricos.
Hessel (2010)	Quanto aos tópicos matemáticos relacionados nos objetivos e resultados dos trabalhos investigados, existe preferência por representações gráficas e algébricas de funções polinomiais de 1º, 2º, e/ou 3º graus. Dois dos trabalhos são pautados nos mesmos referenciais teóricos: as noções de Transposição Informática, de Balacheff, e os Registros de Representação Semiótica, de Duval. Duas pesquisas fundamentam-se, do ponto de vista metodológico, na Engenharia Didática, de Artigue (1996). Além disso, todos os trabalhos convergem quanto à modalidade de Tecnologia da Informação e Comunicação utilizada: software, sendo que o Winplot está presente em três das quatro dissertações selecionadas. O estudo evidencia, por fim, carência de investigações que focalizem a Álgebra e, simultaneamente, abarquem as diversas Tecnologias da Informação e Comunicação.

Fonte: elaborado pelos autores.

Como indicam os aspectos salientados no Quadro 8, os resultados das pesquisas documentais não realizadas via metanálises, panoramas e estados do conhecimento revelam que:



- nas coleções de livros didáticos analisados por Oliveira (2006), embora as equações diofantinas lineares não sejam consideradas objetos do saber a serem desenvolvidos no Ensino Médio, indicações direcionadas aos docentes nos Manuais do Professor explicitam possibilidades de referência a esse objeto matemático, tanto na resolução de problemas quanto em comentários acerca desse processo;
- o objeto matemático equação não tem um significado único, mas múltiplos, dos quais Ribeiro (2007) elencou seis, com diferenças sutis entre eles;
- na Situação de Aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas, presente no Caderno do Professor de 2009 da Rede Pública Estadual de São Paulo, analisada por Hamazaki (2010), estão presentes dez dos treze caracterizadores do pensamento algébrico elaborados a partir das ideias de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), havendo predominância do caracterizador transformar uma expressão ou representação numérica em outra. Embora os três diferentes usos da variável (incógnita, número genérico e relação funcional) tenham se mostrado presentes, a maior frequência é o emprego da variável como incógnita. Por fim, notamos a mobilização do significado intuitivo-pragmático de equação.

Quadro 8 – Principais resultados obtidos nas pesquisas documentais não contempladas no Quadro 7

Autor (Ano)	Principais resultados
Oliveira (2006)	Os PCNEM e os PCN+ não fazem referência explícita ao objeto do saber “ equações diofantinas lineares ” e, da mesma forma, a abordagem de problemas envolvendo quantidades discretas e que poderiam utilizar esse tipo de equação para sua resolução, mesmo com a omissão do termo, não está presente . Nos PCN+ , em relação ao tema “Álgebra: números e funções”, a ênfase dada está nos números e nas variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos , tendo como objetos de estudo os números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Nas coleções de livros didáticos analisadas, o objeto do saber “ equações diofantinas lineares ” não consta entre os objetos de ensino explicitados. No manual do professor das mesmas coleções, observou-se que seus autores, ao apresentarem as características dos problemas propostos, indicam a possibilidade de referência ao objeto do saber “equações diofantinas lineares”, seja na resolução de problemas que envolvam esse tipo de equação, seja em comentários sobre sua resolução.



<p>Ribeiro (2007)</p>	<p>Os multisignificados obtidos levam em consideração dois aspectos: a concepção de equação enquanto um objeto de estudo e a concepção de equação como um algoritmo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Equação como uma noção intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades, cuja utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática (Intuitivo-Pragmático). • Equação como uma noção ligada às figuras geométricas, aos segmentos, cuja utilização está relacionada às situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas, com intersecções de curvas (Dedutivo-Geométrico). • Equação como uma noção estrutural definida e com propriedades e características próprias. É considerada por si própria, operando-se sobre ela mesma na busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza (Estrutural-Generalista). • Equação em uma perspectiva estrutural, diretamente ligada à noção de conjunto, sendo vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relação entre conjuntos (Estrutural-Conjuntista). • Equação como a sua própria resolução — como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Não é compreendida como um ente matemático sobre o qual as operações e manipulações que são realizadas atendem a regras bem definidas (Processual-Tecnicista). • Equação como uma noção da Matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Por essa concepção, a noção de equação é utilizada no mesmo sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana (Axiomático-Postulacional). <p>As diferenças entre os significados são bastante sutis e as linhas que os separam são tênues.</p>
<p>Hamazaki (2010)</p>	<p>Os exercícios vinculados à Situação de Aprendizagem em foco favorecem a presença de dez dos treze caracterizadores do pensamento algébrico, subsídio teórico da pesquisa.</p> <p>O caracterizador transformar uma expressão ou representação numérica em outra é o mais presente. Não estão presentes os caracterizadores: produzir mais de um modelo aritmético/algébrico ou geométrico para uma situação-problema, produzir vários significados para uma mesma expressão; desenvolver ou criar uma linguagem mais concisa ao expressar uma sentença ou expressão matemática.</p> <p>Os três diferentes usos da variável (incógnita, número genérico e relação funcional) se mostraram presentes nos exercícios que compõem a situação analisada, com predominância da variável como incógnita, presente em todos os exercícios.</p> <p>O significado intuitivo-pragmático de equação é mobilizado na maioria dos enunciados e das resoluções propostas.</p>

Fonte: elaborado pelos autores.

Finalizadas as análises referentes às pesquisas documentais, passamos, na sequência, a examinar diferentes aspectos acerca das investigações experimentais que compõem o *corpus* de análise.

Apenas em uma pesquisa experimental os sujeitos são professores. O objetivo e os materiais analisados neste estudo são apresentados no Quadro 9.

Quadro 9 - Objetivo e materiais analisados na pesquisa cujos sujeitos são professores



Autor (Ano)	Nível			Objetivo e materiais analisados
	MA	MP	D	
Costa (2007)	X			Analisar, por meio de transcrições de entrevistas realizadas com seis professores de Matemática do Ensino Médio dos Estados de Minas Gerais e de São Paulo, se e como estes trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares .

Fonte: elaborado pelos autores.

Em todas as pesquisas tendo estudantes como sujeitos, conforme indicado no Quadro 10, foram analisados protocolos escritos produzidos pelos discentes durante a intervenção realizada pelos pesquisadores. Em uma das investigações, a de Pommer (2008), a análise desses materiais foi complementada também pelas gravações de áudio das argumentações e verbalizações dos raciocínios manifestadas pelos sujeitos. Essa complementação ocorreu também na pesquisa de Pereira (2005), que analisou, além dos protocolos, a resolução das questões de Matemática do Vestibular apresentadas aos sujeitos no momento de seus ingressos na Licenciatura. Relativamente aos objetivos visados na análise desses protocolos e, no caso de Pommer (2008), também das gravações em áudio, e de Pereira (2005), das questões resolvidas pelos sujeitos no Vestibular, eles se relacionam: à identificação e análise de erros, procedimentos e estratégias utilizadas na resolução de equações algébricas de 1º grau (Daniel, 2008); à explicitação e análise dos conhecimentos sobre equações (Pereira, 2005) e de equações diofantinas lineares (Pommer, 2008); e à análise das conversões entre representações do registro da língua natural para o registro algébrico no trabalho com equações e expressões (Vaz, 2008).

Quadro 10 – Objetivos e materiais analisados nas pesquisas cujos sujeitos são estudantes

Autor (Ano)	Nível			Objetivo e materiais analisados
	MA	MP	D	
Pereira (2005)		X		Identificar e analisar os conhecimentos sobre equações de 34 licenciandos em Matemática , por meio da análise de questões de Matemática dos dois Exames de Vestibular/2005 resolvidas pelos estudantes que ingressaram em 2005 em um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição particular do Estado de São Paulo e dos protocolos provenientes de um teste diagnóstico , contendo questões sobre Expressões Algébricas e Equações, realizado com os alunos após o estudo de conteúdos envolvendo Conjuntos Numéricos e operações no conjunto dos Números Reais e antes do estudo dos conteúdos sobre Cálculo Algébrico, Polinômios e Equações.



Daniel (2008)	X	Identificar e analisar, a partir de protocolos resultantes da resolução de equações algébricas de 1º grau em um laboratório de informática , os erros , os procedimentos e as estratégias utilizadas por 8 alunos de 8ªs séries do Ensino Fundamental de uma escola estadual do interior do Estado de São Paulo.
Pommer (2008)	X	Analisar, a partir dos protocolos escritos e gravações de áudio das argumentações e verbalizações dos raciocínios de 7 estudantes do Ensino Médio (sendo 3 do 1º ano e 4 do 3º ano) de uma escola estadual da cidade de São Paulo, se é possível a tais sujeitos explicitar conhecimentos sobre equações diofantinas lineares .
Vaz (2008)	X	Analisar, a partir de protocolos escritos , o desempenho de 33 alunos do 8º ano de uma escola estadual da cidade de São Paulo na resolução de três questões do SARESP/2005 relacionadas à Álgebra em questões referentes a equações e expressões envolvendo a conversão de representações do registro de representação semiótica da língua natural para representações no registro algébrico .

Fonte: elaborado pelos autores.

Como apresentado no Quadro 11, as pesquisas experimentais são todas de caráter qualitativo, sendo adotadas as concepções de Bogdan e Biklen (1994), Gouveia (1984) e Lüdke e André (1986) para esse termo. Somente Vaz (2008) não explicita qual visão de pesquisa qualitativa foi empregada. Apenas Daniel (2008), que caracteriza sua pesquisa como diagnóstica, menciona, explicitamente, que seu estudo tem cunho experimental, adotando como referência a acepção de Köche (2003). Pereira (2005) caracteriza sua investigação como um estudo de caso. Em dois estudos (Pommer, 2008; Vaz, 2008) são empregados preceitos da Engenharia Didática na visão de Artigue (1996). Em um trabalho (Costa, 2007), recorre-se às entrevistas semiestruturadas para a produção dos dados a serem analisados.

Quadro 11 – Metodologias empregadas nas pesquisas experimentais

Autor (Ano)	Metodologias empregadas
Pereira (2005)	Pesquisa qualitativa na acepção de Bogdan e Biklen (1994), do tipo estudo de caso , na concepção de Lüdke e André (1986).
Costa (2007)	Pesquisa qualitativa na acepção de Bogdan e Biklen (1994), por meio de entrevistas semiestruturadas segundo Lüdke e André (1986).
Daniel (2008)	Pesquisa diagnóstica de predominância qualitativa , segundo Gouveia (1984), e experimental , na concepção de Köche (2003).
Pommer (2008)	Pesquisa qualitativa , na acepção de Lüdke e André (1986), recorrendo à Engenharia Didática , descrita em Artigue (1996), para elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática.
Vaz (2008)	Pesquisa qualitativa baseada nas fases da metodologia qualitativa da Engenharia Didática , segundo Artigue (1996).

Fonte: elaborado pelos autores.

Como evidenciam os dados apresentados no Quadro 12, as únicas convergências observadas em relação aos referenciais teóricos empregados são os trabalhos acerca do ensino de Teoria Elementar dos Números, de Campbell e Zaskis (2002) e de Resende (2007), os quais subsidiam as investigações de Costa (2007) e Pommer (2008). Em termos de referenciais da Didática da Matemática, duas pesquisas os utilizaram, a saber: Vaz (2008), que recorreu aos Níveis de Mobilização de Conhecimentos, de Aline Robert (1998), e à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2003); e Pereira (2005), que empregou as ideias de Usiskin (1995), Kieran (1992, 1995) e de Lemoyne, Conne e Brun (1993) a respeito das utilizações das variáveis e do ensino e da aprendizagem de Álgebra.

Quadro 12 – Referenciais teóricos empregados nas pesquisas experimentais

Autor (Ano)	Referenciais teóricos empregados
Pereira (2005)	Pesquisas de Usiskin (1995) sobre as utilizações das variáveis , e de Kieran (1992, 1995) e Lemoyne, Conne e Brun (1993) sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra .
Costa (2007)	Do ponto de vista matemático : questões acerca do ensino de Teoria Elementar dos Números nos três níveis de educação (infantil, básica e superior) segundo os pesquisadores Campbell e Zaskis (2002), Maranhão, Machado e Coelho (2004), Machado <i>et al.</i> (2005), Resende (2007).
Daniel (2008)	Categorias de erros e análises das estratégias de estudantes na resolução de equações algébricas de 1º grau, segundo Cortés e Kavafian (1999).
Pommer (2008)	Do ponto de vista matemático : reflexões de Campbell e Zaskis (2002), Ferrari (2002) e Resende (2007) acerca do ensino de Teoria Elementar dos Números . Do ponto de vista histórico relativo às equações diofantinas : Rocque e Pitombeira (1991), Milies e Coelho (2003), Zerhusen, Rakes e Meece (2005). Também foram contemplados os estudos correlatos ao tema equações diofantinas desenvolvidos por Oliveira (2006) e Costa (2007).
Vaz (2008)	Níveis de Mobilização de Conhecimentos , de Robert (1998), e Teoria dos Registros de Representação Semiótica , de Duval (2003).

Fonte: elaborado pelos autores.

No Quadro 13, são apresentados os principais resultados obtidos nas pesquisas experimentais. Uma vez que não há convergências entre eles, o que já era por nós esperado em razão de os objetivos dos estudos serem distintos, optamos por, na sequência, explicitar alguns aspectos que potencializam a compreensão dos elementos destacados no mencionado quadro.

Quadro 13 – Principais resultados obtidos nas pesquisas experimentais



Autor (Ano)	Principais resultados
Pereira (2005)	<p>Dos 34 sujeitos, 17 (40%) apresentaram apenas fragmentos do conceito de equação. Apenas um (2,94%) associou a noção de equação à de igualdade, o que possibilitou depreender que esse aluno, possivelmente, não associa a noção de equação à de equivalência entre os dois membros da igualdade. Dos 34 sujeitos, 15 não souberam diferenciar uma equação de uma expressão algébrica. A simples ocorrência do sinal de igualdade em uma expressão algébrica não levou os alunos a relacioná-la com uma possível equação, como no caso, por exemplo, de um polinômio representado algebricamente. Trinta e dois alunos (94,12%) tiveram dificuldades em diferenciar uma incógnita de uma variável, o que conduziu à inferência de que a maioria dos sujeitos não associou a noção de incógnita à de equação. Quando solicitados a simplificar uma expressão algébrica, aplicaram procedimentos de resolução de equação.</p>
Costa (2007)	<p>Os problemas que recaem em equações diofantinas lineares, apesar de algumas vezes serem trabalhados com os alunos, não fazem parte do repertório mais frequente utilizado pelos professores do Ensino Médio e, quando trabalhados, não são solucionados por meio das ferramentas indicadas pela Teoria Elementar dos Números, reflexo talvez, do que é apontado nos livros didáticos desse nível educacional.</p>
Daniel (2008)	<p>Ao resolver equações algébricas de 1º grau com o auxílio do software Aplusix, os alunos reveem e modificam mais rapidamente suas respostas do que ao trabalhar com lápis e papel; buscam uma quantidade maior de estratégias para resolver as equações, além de terem suas motivações incrementadas ao resolver os exercícios e terem maior liberdade em relação aos seus tempos de aprendizagem e às maneiras de encaminhar suas resoluções.</p> <p>Um ponto negativo identificado pelo pesquisador no Aplusix é que ele considera equivalente duas etapas consecutivas analisando apenas o conjunto solução de cada etapa, ou seja, não faz uma análise da operação realizada em cada etapa, podendo, assim, ocorrer erros na resolução do exercício. Uma vantagem é a ferramenta denominada videocassete, que possibilita ao professor analisar detalhadamente como o aluno resolve o exercício e detectar os erros por ele cometidos.</p>
Pommer (2008)	<p>Ao se depararem com situações envolvendo equações diofantinas lineares, os estudantes utilizaram as grandezas discretas como soluções, descartando as de natureza contínua. A principal estratégia espontânea foi a tentativa e erro, que evoluiu, no decurso das atividades, para manifestações do uso do múltiplo ou divisor de um número inteiro como ferramenta facilitadora na busca de soluções inteiras. Explicitaram perceber e estabelecer alguma conexão entre os dados fornecidos nos enunciados e a solução dos problemas, porém, em alguns casos, não souberam validar tal solução. Manifestaram inquietação nas situações para as quais não encontraram solução. As atividades permitiram o desenvolvimento de habilidades como interpretar e conjecturar, assim como a busca de estratégias de resolução, sem necessariamente envolver a aplicação direta de algoritmos.</p>
Vaz (2008)	<p>As dificuldades manifestadas pelos alunos relacionam-se tanto à interpretação do enunciado e ao processo de conversão de representações semióticas, das numéricas para as algébricas, e vice-versa, quanto ao tratamento de representações nesses registros. Com relação às conversões de representações nos registros da língua natural para representações algébricas, nenhum aluno obteve sucesso.</p>

Fonte: elaborado pelos autores.

Acerca do trabalho de Pereira (2005), é relevante ressaltar que, ao questionar os sujeitos (futuros professores de Matemática) sobre se empregavam as equações



para solucionar problemas contextualizados envolvendo valores desconhecidos e propostos em língua natural, o autor concluiu que uma parcela significativa dos futuros professores não utilizava equação como ferramenta nesse processo. Outro aspecto a ser salientado em complementação ao que apresentamos no Quadro 13 é que, ao resolver uma equação ou simplificar uma expressão algébrica, os sujeitos cometeram equívocos relativos à adição de termos não semelhantes.

Conforme analisa Costa (2007), embora os professores entrevistados tenham afirmado trabalhar com problemas de Matemática Discreta modeláveis via equação diofantina linear, nenhum deles deu indícios de, nesse trabalho junto aos alunos, utilizar conhecimentos das propriedades dessas equações para decidir se têm solução e quais são elas. A estratégia de resolução mais explorada pelos docentes entrevistados foi o ensaio e erro, e alguns professores recorreram às estimativas. Um dos docentes afirmou não aconselhar que os estudantes resolvam, de fato, as equações, para, assim, estimulá-los a desenvolver o que denomina “linha de raciocínio mental”. Há, entre os sujeitos, um que não considerou o fato de as soluções necessitarem estar no conjunto dos números inteiros já corresponder a uma restrição. Durante as entrevistas, alguns professores citaram a necessidade de mais uma equação ou mais restrições para resolver os problemas, indicação de que, embora tenham afirmado trabalhar com problemas com mais de uma solução, nesse caso, a maioria deles não associou uma equação com duas incógnitas à possibilidade de haver várias soluções.

Ao destacar os resultados de sua pesquisa, Daniel (2008) salienta que, ao utilizarem o *software* Aplusix, a razão de os estudantes reverem e modificarem mais rapidamente suas respostas do que ao trabalharem com lápis e papel talvez ocorra devido ao fato de eles, ao empregarem o *software*, disporem da possibilidade de verificação permanente do seu trabalho, validando-o ou não em cada etapa da resolução. O pesquisador destaca ainda que as dificuldades evidenciadas pelos sujeitos ao resolver equações algébricas polinomiais de 1º grau foram: transpor um termo de um membro para outro da equação sem fazer a operação inversa, aplicar de forma incorreta a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, realizar incorretamente o cálculo do mínimo múltiplo comum etc., erros que podem

decorrer de dificuldades conceituais e da mecanização de determinadas regras. Com relação aos métodos de resolução, todos os alunos utilizaram o mesmo método: transpor um termo de um membro para outro da igualdade, sem aplicação explícita do princípio aditivo ou do multiplicativo. A partir das indicações disponibilizadas ao professor pela ferramenta videocassete, ele terá melhores condições de propor atividades adequadas e utilizar o *software* para trabalhar de forma diferenciada com alunos que têm mais dificuldade.

Acerca dos resultados obtidos, Pommer (2008) comenta, no que diz respeito aos estudantes manifestarem inquietações ao se depararem com situações para as quais não encontraram solução, que eles utilizaram preferencialmente a estratégia da tentativa e erro, o que não lhes possibilitou formular conjecturas relacionadas às propriedades da Teoria Elementar dos Números que permitissem validar a inexistência de solução. O desempenho dos sujeitos do 3º ano do Ensino Médio foi superior ao desempenho dos do 1º ano, o que possivelmente ocorreu pelo fato de os primeiros terem vivenciado mais situações no ambiente escolar relacionadas a temas que envolviam grandezas discretas, tais como sequências numéricas, progressões aritméticas e análise combinatória. O autor concluiu, a partir de seu estudo, que é possível a alunos de Ensino Médio desenvolver conhecimentos relativos às equações diofantinas lineares, se lhes for estimulada uma ação independente para desenvolver estratégia facilitadora que operacionalize conceitos da Teoria Elementar dos Números — múltiplos ou divisores —, assim como o uso da escrita algébrica como ferramenta otimizadora e organizadora na busca das soluções inteiras.

Por fim, acerca dos resultados obtidos por Vaz (2008), convém destacar que, segundo a autora, dos 32 sujeitos, apenas dois tentaram a conversão de uma representação no registro da língua natural para uma representação algébrica, porém sem sucesso, não só na conversão das representações, como também no trabalho com elas. Mesmo na manipulação dos termos algébricos ou numéricos, os alunos não apresentaram rendimento satisfatório. Em duas das três questões resolvidas não houve emprego de representações no registro algébrico, apenas no aritmético.

Passemos, então, no Quadro 14, à análise das principais sugestões para investigações futuras apresentadas pelos autores das pesquisas estudadas.



Quadro 14 – Sugestões para investigações futuras explicitadas nas pesquisas realizadas via metanálises, panoramas e estados do conhecimento

Autor (Ano)	Principais sugestões para pesquisas futuras
Martins (2008)	Investigações relativas às equações polinomiais de 2º grau , ao uso de recursos multimídia diversos e metanálises qualitativas, em nível de doutorado , com a temática equações algébricas .
Nagamachi (2009)	Sínteses de dissertações e teses relacionadas às equações com o uso de tecnologias .
Pereira (2010)	Panorama de dissertações e teses sobre equações algébricas visando identificar as indicações dos autores para o ensino desses objetos matemáticos. Investigação visando responder à seguinte questão: os professores de Matemática da Rede Pública Estadual que atuam no Ensino Fundamental planejam suas aulas sobre equações subsidiados por pesquisas produzidas nas universidades? Em caso positivo, com que frequência isso ocorre?
Hessel (2010)	Sínteses de pesquisas sobre equações com o uso de tecnologias em diferentes níveis de ensino .

Fonte: elaborado pelos autores.

Analisando o Quadro 14, depreendemos que das quatro investigações realizadas via metanálises, panoramas e estados do conhecimento, três (Martins, 2008; Nagamachi, 2009; Hessel, 2010) sinalizam como caminhos para futuras pesquisas, a realização desses mesmos tipos de estudos, mas com o objetivo de compreender como o uso das tecnologias no ensino e na aprendizagem de equações tem sido discutido na esfera acadêmica.

Por meio do Quadro 15, notamos que as sugestões para pesquisas futuras apresentadas nos estudos documentais não realizados via metanálises, panoramas e estados do conhecimento, vinculam-se à realização de pesquisas experimentais em que os professores são sujeitos, no intuito de analisar os aspectos relativos à Teoria Elementar dos Números presentes nas práticas docentes (Oliveira, 2006), os diferentes significados da noção de equação que compõem os repertórios dos professores e como são colocados em ação em seus trabalhos com os estudantes (Ribeiro, 2007) e se os caracterizadores do pensamento algébrico observados junto a alunos em determinada situação são os mesmos que os professores empregariam (Hamazaki, 2010).

Quadro 15 – Sugestões para investigações futuras explicitadas nas pesquisas documentais não contempladas no Quadro 14

Autor (Ano)	Principais sugestões para pesquisas futuras
--------------------	--



Oliveira (2006)	<p>Pesquisas visando responder aos seguintes questionamentos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Os professores do Ensino Médio trabalham, em suas aulas, os assuntos de Teoria Elementar dos Números? Em caso afirmativo, como? ✓ Os alunos do Ensino Médio resolvem problemas que envolvem conhecimentos relativos a assuntos de Teoria Elementar dos Números? Em caso afirmativo, como?
Ribeiro (2007)	<p>Pesquisas, no âmbito da formação de professores, que identifiquem e discutam as diferentes formas de conceber a noção de equação nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.</p> <p>Investigações visando responder à questão: quais dos significados da noção de equação apresentados em Ribeiro (2007) fazem parte dos repertórios dos professores que ensinam Matemática e como eles trabalham esses significados com seus alunos?</p>
Hamazaki (2010)	<p>Investigação que busque analisar se os caracterizadores do pensamento algébrico revelados pelos alunos ao trabalharem com a mesma situação de aprendizagem empregada por Hamazaki (2010) são os mesmos que os identificados para os professores.</p>

Fonte: elaborado pelos autores.

Os dados apresentados no Quadro 16 revelam que não há, nas pesquisas experimentais que compõem o *corpus* analisado, uma direção predominante para futuros estudos. Observamos, no entanto, que analisar se e como os alunos do Ensino Médio resolvem problemas envolvendo elementos da Teoria Elementar dos Números é indicação presente tanto em uma das pesquisas desse conjunto (Costa, 2007) quanto em outra apresentada no Quadro 15 (Oliveira, 2006). Além disso, a indicação feita por Daniel (2008) acerca do uso de recursos tecnológicos no trabalho com equações, especialmente as polinomiais de segundo grau, é concordante com a explicitada por Martins (2008), autor de uma das pesquisas documentais que analisamos.

Quadro 16 – Sugestões para investigações futuras indicadas nas pesquisas experimentais

Autor (Ano)	Principais sugestões para pesquisas futuras
Pereira (2005)	<p>Estudos que possibilitem validar ou refutar as seguintes premissas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se a equação é um objeto do saber a ensinar, então os conteúdos de natureza conceitual, procedimental e atitudinal a ele relacionados devem ser ensinados aos alunos, constituindo, portanto, conteúdos específicos. • Se a equação é uma noção paramatemática concebida como uma ideia possível de ser aprendida, então não constitui, necessariamente, um objeto de saber específico, uma vez que é caracterizada como ferramenta auxiliar para as atividades matemáticas.
Costa (2007)	<p>Investigações visando responder se e como os alunos do Ensino Médio resolvem problemas que envolvem conhecimentos relativos aos assuntos de Teoria Elementar dos Números.</p>



	Pesquisa envolvendo a elaboração de uma sequência didática para inserir explicitamente o tema equações diofantinas lineares no Ensino Médio .
Daniel (2008)	Pesquisas envolvendo o estudo de equações polinomiais de 2º grau, com utilização de ferramentas computacionais e emprego da fatoração da equação para resolvê-las.
Pommer (2008)	Realização de pesquisas contemplando: <ul style="list-style-type: none"> ✓ a abrangência de contextos em diversas áreas do conhecimento que sejam importantes para o desenvolvimento e a formação da cidadania, nos quais as equações diofantinas estão presentes; ✓ o desenvolvimento de outros meios de interação do aluno, na aprendizagem de equações diofantinas, por meio de jogos com material estruturado ou com ambientação virtual; ✓ a validação do máximo divisor comum como condição necessária e suficiente para a existência de soluções de situações envolvendo equações diofantinas lineares; ✓ as possibilidades do desenvolvimento das expressões resolutivas das equações diofantinas lineares a duas incógnitas, por meio de observação e generalização de padrões.
Vaz (2008)	Não há.

Fonte: elaborado pelos autores.

A seguir, tecemos algumas considerações que podem ser depreendidas a partir do estudo por nós realizado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma vez que os pontos principais de cada um dos trabalhos analisados já foram detalhadamente apresentados ao longo do artigo, nestas considerações finais, optamos por ressaltar os possíveis caminhos para novas pesquisas relacionadas à temática equação sinalizados pelos autores dos mencionados trabalhos, bem como explicitar direções que, apesar de não estarem presentes nas dissertações e teses que compuseram o *corpus* de análise, entendemos como campos férteis para estudos a serem desenvolvidos na esfera do GPEA.

Notamos, em primeiro lugar, a demanda por um maior número de teses de doutorado cujo tema seja equação, em diferentes perspectivas. Atualmente duas pesquisas dessa natureza foram realizadas e defendidas por integrantes do Grupo, mas enfocando um tipo de equação abordado apenas no Ensino Superior: as equações diferenciais ordinárias (Pinto, 2021; Silva, 2022). A carência de estudos de

doutorado relacionados aos diferentes tipos de equações abordados na Educação Básica continua latente.

Na visão dos autores das pesquisas mapeadas, assim como em nossa concepção, é necessário realizar investigações de cunho experimental tendo professores como sujeitos, uma vez que, ao longo da trajetória do GPEA, apenas um estudo desse tipo foi realizado. É relevante que essas pesquisas contemplem sujeitos tanto em formação inicial, como em exercício e em formação continuada. Entre possíveis temas de estudo estão, na visão dos autores dos trabalhos analisados, aspectos relativos à Teoria Elementar dos Números presentes nas práticas docentes, os diversos significados de equação que fazem parte dos quadros de conhecimentos dos professores, como esses significados são mobilizados pelos docentes no trabalho com seus alunos e uma comparação entre os componentes do pensamento algébrico manifestados pelos estudantes em determinada situação e aqueles evidenciados pelos docentes no mesmo contexto.

Uma vez que se salienta, em um dos trabalhos analisados, a necessidade de maior articulação entre a Álgebra e a Geometria na abordagem das equações em sala de aula, entendemos como um caminho potencialmente rico a ser trilhado por membros do Grupo ou por outros pesquisadores da Educação Matemática, o desenvolvimento, a implementação junto a estudantes e/ou professores e a análise de sequências didáticas visando oportunizar a mencionada articulação.

O aspecto mais destacado como necessário de ser alvo de novas investigações refere-se ao uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação nos processos de ensino e de aprendizagem de diferentes tipos de equações.

Investigações relativas à temática equação e subsidiadas por diferentes referenciais teóricos da Didática da Matemática, em suas diferentes vertentes, revelam-se como possibilidades para estudos futuros no âmbito do Grupo, uma vez que, ao longo de sua história, ao menos no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem de estudantes da Educação Básica, há somente duas pesquisas nessa direção.

Por fim, ressaltamos a pertinência de o Grupo retomar os estudos relativos aos diferentes tipos de equação trabalhados na Educação Básica, uma vez que o assunto

não é abordado por seus membros há 12 anos e, nesse período, além de os recursos tecnológicos e didáticos terem se diversificado e evoluído, importantes alterações ocorreram no cenário educacional, como, por exemplo, a implantação da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018). Há, portanto, muitas perspectivas a serem exploradas.

BARBARA LUTAIF BIANCHINI

Bacharel e licenciada em Matemática pela PUC-SP, licenciada em Pedagogia pela Universidade de Franca, mestra em Educação Matemática pela PUC-SP e doutora em Educação (Psicologia da Educação) pela mesma Universidade. É líder do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA). Atua como professora e pesquisadora no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

GABRIEL LOUREIRO DE LIMA

Bacharel, licenciado e mestre em Matemática pela UNICAMP, doutor em Educação Matemática pela PUC-SP. É vice-líder do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA). Atua como professor e pesquisador no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. Análise da produção do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica da PUC-SP em relação à Teoria dos Registros de Representação Semiótica na Educação Básica. *Educação Matemática em Revista* – Rio Grande, v. 2, n. 23, p. 44-61, 2022.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. Álgebra Linear: as investigações do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) subsidiadas por teorias da Didática Francesa. *In: SEMINÁRIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA – LADIMA, 3., 2021. Evento online. Resumo expandido não publicado.*

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L.; MACHADO, S. D. A. O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA): mapeamento de algumas de suas produções. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 1-28, 2019.

BIEMBENGUT, M. S. *Mapeamento na pesquisa educacional*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

BIEMBENGUT, M. S. Mapeamento como princípio metodológico para a pesquisa educacional. *In: MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. (org.). Linguagem, conhecimento, ação: ensaios de epistemologia e didática*. São Paulo: Escrituras, 2003. p. 1-11.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.

COSTA, E. S. *As equações diofantinas lineares e o professor de Matemática do Ensino Médio*. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007

DANIEL, J. A. *Um estudo de equações algébricas do 1º grau com o auxílio do software Aplusix*. 2007. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L.; LIMA, R. C. R. (org.). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001-2012*. Campinas: FE/UNICAMP, 2016.

HAMAZAKI, A. C. *Análise da situação de aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do Professor de 2009 do Estado de São Paulo*. 2010. 132 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

HESSEL, L. A. *Um estado do conhecimento de dissertações e teses brasileiras sobre equações: o uso das tecnologias no Ensino Médio (1998-2008)*. 2010. 73 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

MARTINS, A. M. *Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental*. 2008. 142 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

NAGAMACHI, M. T. *Equações no ensino médio: uma metanálise qualitativa das dissertações e teses produzidas no Brasil de 1998 a 2006*. 2009. 72 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

OLIVEIRA, S. B. *As equações diofantinas lineares e o livro didático de Matemática para o Ensino Médio*. 2006. 102 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PEREIRA, A. *Equações Algébricas no Ensino Fundamental: um panorama de dissertações da PUC-SP*. 2010. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PEREIRA, M. D. *Um estudo sobre equações: identificando conhecimentos de alunos de um curso de formação de professores de Matemática*. 2005. 186 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PINTO, R. L. *Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis na engenharia civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor*. 2021. 313 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

POMMER, W. M. *Equações diofantinas lineares: um desafio motivador para alunos do Ensino Médio*. 2008. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

RIBEIRO, A. J. *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico*. 2007. 141 f. Tese (Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, A. R. *Uma proposta de ensino de equações diferenciais em cursos de Engenharia Civil à luz da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências*. 2022. 277 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

VAZ, R. A. C. *SARESP/2005: uma análise de questões de Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos Registros de Representação Semiótica*. 2008. 134 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

*Recebido em 21 de março de 2023
Aceito em 02 de julho de 2024*